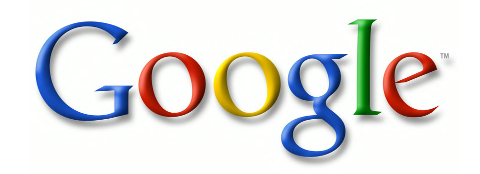
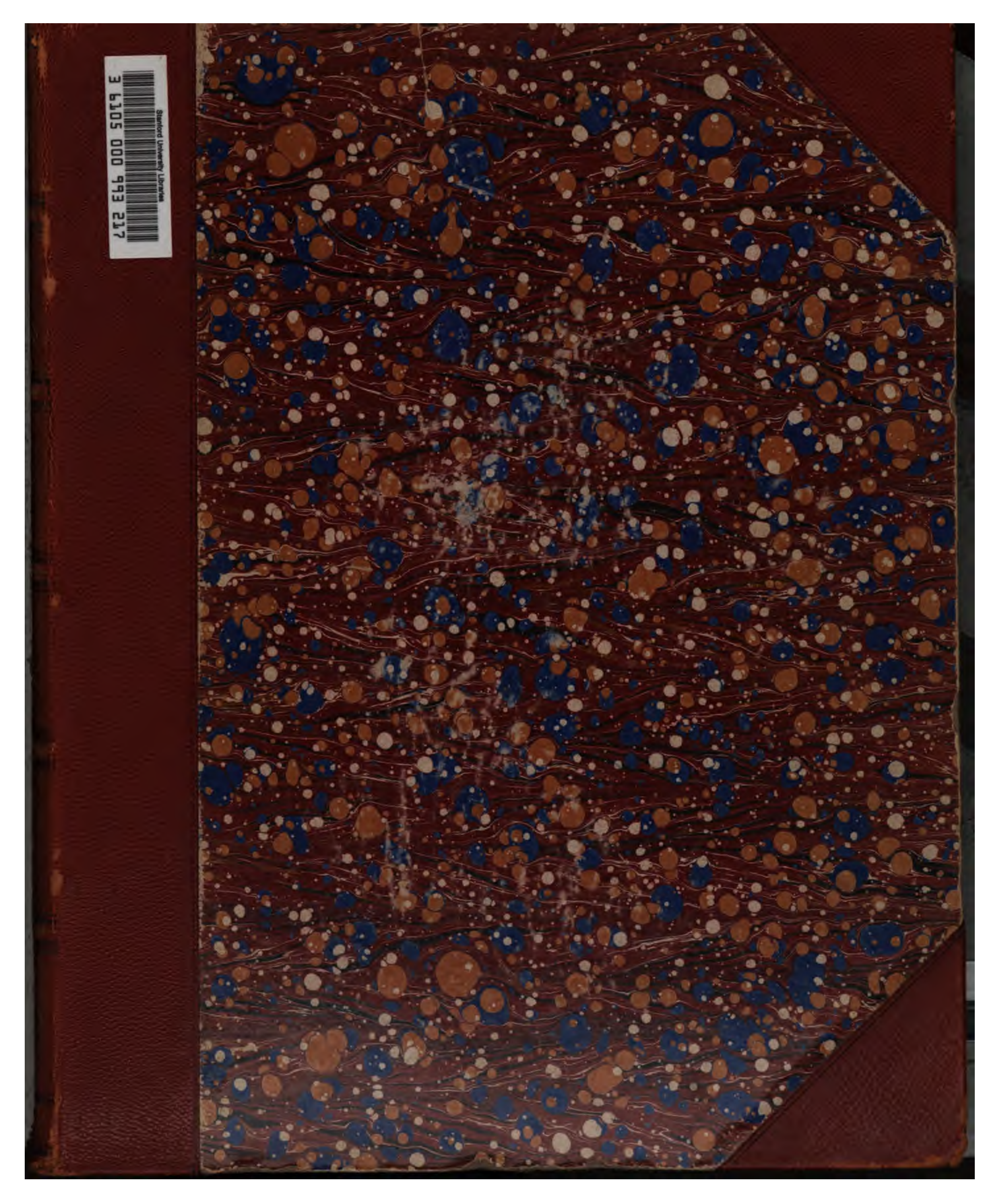








Journal

für die

reine und angewandte Mathematik

gegründet von A. L. Crelle 1826.

Herausgegeben

von

L. Fuchs.

Mit thätiger Beförderung hoher Königlich Preussischer Behörden.

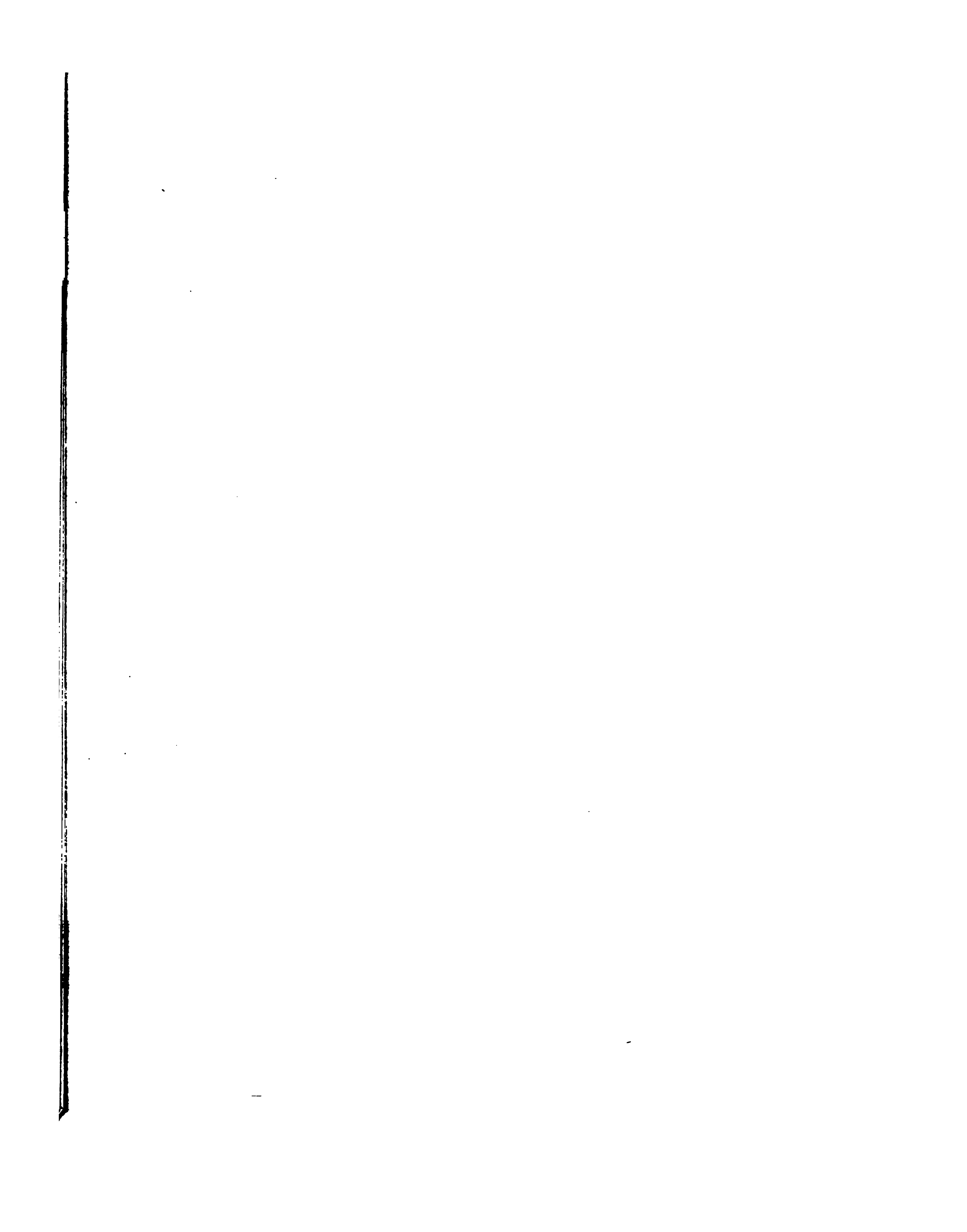
Band 120.

In vier Heften.

Berlin,
S.W. Anhaltstrasse 12.
Druck und Verlag von Georg Reimer.
1899.

Inhaltsverzeichniss des Bandes 120.





Ueber das Verhalten der Integrale einer linearen Differentialgleichung erster Ordnung in der Umgebung einer Unbestimmtheitsstelle.

(Von Herrn *J. Horn* in Charlottenburg.)

In der letzten in diesem Journal (Bd. 119, S. 267—290) erschienenen Arbeit des Verfassers wurden für die Integrale einer Differentialgleichung erster Ordnung mit der Unbestimmtheitsstelle $x = 0$

$$x^{k+1}\frac{dy}{dx} = y\mathfrak{P}(x, y),$$

wo k eine ganze positive Zahl ($k > 0$) und $\mathfrak{P}(x, y)$ eine für hinreichend kleine Werthe von $|x|$ und $|y|$ convergente Potenzreihe bedeutet, Reihen aufgestellt, deren Glieder durch Quadratur oder durch Integration linearer, nicht homogener Differentialgleichungen erster Ordnung zu bestimmen sind. Es wurde gezeigt, dass diese Reihen für hinreichend kleine reelle positive Werthe von x convergent sind, wenn der reelle Theil von $\mathfrak{P}(0, 0)$ positiv ist. Bevor ich die früheren Untersuchungen weiterführe, möchte ich diejenigen Integralausdrücke, welche einer linearen Differentialgleichung erster Ordnung von der Form

$$x^{k+1}\frac{dy}{dx} + (a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots)y = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \cdots$$

genügen, einer genaueren Betrachtung unterziehen mit Rücksicht auf ihr Verhalten bei der Annäherung der Veränderlichen an die singuläre Stelle $x = 0$, welche im allgemeinen eine Unbestimmtheitsstelle ist, sowie bei einem Umlauf um diese Stelle (§ 1 und § 2). Auf die erste Frage geben divergente, auf die zweite convergente Reihenentwickelungen Auskunft.

Sodann handelt es sich um diejenigen Werthe von x in der Umgebung von $x = 0$, für welche die Integrale gegebene Werthe annehmen, insbesondere um die Nullstellen der Integrale, und um die Heranziehung der Theorie der ganzen transcendenten Functionen (§ 3.).

Eine gesonderte Darstellung dieser Untersuchung scheint mir namentlich deswegen nicht unzweckmässig, weil sich hier die Bedeutung der der Differentialgleichung genügenden divergenten Potenzreihe

$$S = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots$$

in der ganzen Umgebung von $x = 0$ mit einfachen Hülfsmitteln untersuchen lässt, während eine vollständige Untersuchung für lineare Differentialgleichungen höherer Ordnung im Anschluss an die Arbeiten *Poincarés**) noch der Ausführung harrt. In der Abhandlung von *Briot* und *Bouquet***) ist gezeigt, dass die der linearen Differentialgleichung

$$x^2 \frac{dy}{dx} = ay + b_1 x + b_2 x^2 + \cdots$$

genügende Potenzreihe S im allgemeinen divergent und nur unter einer gewissen Bedingung convergent ist. Diese Untersuchung wird im Folgenden, freilich unter Anwendung anderer Hülfsmittel, fortgesetzt und verallgemeinert.

§ 1.

Die Differentialgleichung

$$\text{(1.)} \qquad x^{k+1} \frac{dy}{dx} + g(x) . y = h(x),$$

worin k eine ganze positive Zahl ($k > 0$) und

$$g(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots,$$
$$h(x) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \cdots$$

Potenzreihen von x sind, welche für hinreichend kleine Werthe von $|x|$ convergiren, kann durch die Substitution

$$y = y' e^{-\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} a_{k+\nu} \frac{x^\nu}{\nu}}$$

auf eine Differentialgleichung von derselben Form gebracht werden, in welcher

$$g(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_k x^k$$

ist. Wir können ohne Beeinträchtigung der Allgemeinheit $a_0 = 1$ voraussetzen. Der Convergenzradius der Potenzreihe $h(x)$ sei grösser als $\mathfrak{r}$. Setzt man

$$\text{(2.)} \qquad t = e^{-\left(\frac{1}{k x^k} + \frac{a_1}{(k-1) x^{k-1}} + \cdots + \frac{a_{k-1}}{x}\right)} x^{a_k},$$

*) Amer. Journ. Bd. 7. — Act. math. Bd. 8.

**) Journ. de l'Éc. Pol., cah. 36.

so hat die Differentialgleichung (1.) das allgemeine Integral

$$(3.)\qquad y = Ct^{-1}+t^{-1}\int_0^x \frac{h(x)}{x^{k+1}}\,t\,dx$$

mit der Constanten C; der Integrationsweg muss den Punkt $x=0$ in einer solchen Richtung verlassen, dass $\lim\limits_{x=0} t = 0$ ist.

Wir betrachten zunächst den Fall $k=1$:

$$(1'.)\qquad x^2\frac{dy}{dx}+(1+a_1x)y = h(x) = b_0+b_1x+b_2x^2+\cdots.$$

Durch die Potenzreihe

$$(4'.)\qquad y = S = c_0+c_1x+c_2x^2+\cdots,$$

deren Coefficienten sich aus den Gleichungen

$$c_0 = b_0,$$
$$c_\lambda+(a_1+\lambda-1)c_{\lambda-1} = b_\lambda \qquad (\lambda=1,2,\ldots)$$

ergeben, wird (1'.) formell befriedigt. Das particuläre Integral

$$(5'.)\qquad \eta = e^{\frac{1}{x}}x^{-a_1}\int_0^x h(x)e^{-\frac{1}{x}}x^{a_1-2}dx,$$

welches aus (3.) durch Nullsetzen von C hervorgeht, sei dadurch fixirt, dass man den Punkt $x=0$ mit $\arg x=0$ oder allgemeiner mit $-\frac{\pi}{2}<\arg x<\frac{\pi}{2}$ verlässt und die negative reelle Axe nicht überschreitet. Setzt man

$$J_\nu = e^{\frac{1}{x}}x^{-a_1}\int_0^x e^{-\frac{1}{x}}x^{a_1+\nu-2}dx$$

mit demselben Integrationsweg wie bei (5'.), so ist

$$\eta = \sum_{\nu=0}^{\infty} b_\nu J_\nu.$$

Durch theilweise Integration ergiebt sich

$$\int e^{-\frac{1}{x}}x^{a_1+\nu-2}dx = e^{-\frac{1}{x}}x^{a_1+\nu}-(a_1+\nu)\int e^{-\frac{1}{x}}x^{a_1+\nu-1}dx,$$

also

$$J_\nu = x^\nu-(a_1+\nu)J_{\nu+1}$$

oder

$$\Gamma(a_1+\nu)J_\nu = \Gamma(a_1+\nu)x^\nu-\Gamma(a_1+\nu+1)J_{\nu+1}.$$

Hieraus erhält man

$$\Gamma(a_1+\nu)J_\nu = \sum_{\lambda=\nu}^{n}(-1)^{\lambda-\nu}\Gamma(a_1+\lambda)x^\lambda+(-1)^{n-\nu+1}\Gamma(a_1+n+1)J_{n+1}$$

und

$$\sum_{\nu=0}^{n} b_\nu J_\nu = \sum_{\lambda=0}^{n} c_\lambda x^\lambda + BJ_{n+1},$$

wobei gesetzt ist:

$$c_\lambda = \sum_{\nu=0}^{\lambda}\frac{(-1)^{\lambda-\nu}\Gamma(a_1+\lambda)b_\nu}{\Gamma(a_1+\nu)}, \qquad (\lambda=0,1,\dots,n)$$

$$B = \sum_{\nu=0}^{n}\frac{(-1)^{n-\nu+1}\Gamma(a_1+n+1)b_\nu}{\Gamma(a_1+\nu)}.$$

Die so berechneten Grössen c_λ sind nichts anderes als die Coefficienten der Reihe S. Wir haben nun

$$\eta = \sum_{\lambda=0}^{n} c_\lambda x^\lambda + BJ_{n+1}+b_{n+1}J_{n+1}+b_{n+2}J_{n+2}+\cdots.$$

Im Folgenden wird sich zeigen, dass die Reihe S im allgemeinen divergent ist. Aus der letzten Gleichung ergiebt sich später ihre Bedeutung für die Untersuchung des Integrals η.

Wir gehen nun zur allgemeinen Differentialgleichung

$$(1.) \qquad x^{k+1}\frac{dy}{dx}+(1+a_1x+\cdots+a_kx^k)y = h(x) = b_0+b_1x+b_2x^2+\cdots$$

über, welche formell befriedigt wird durch die Reihe

$$(4.) \qquad S = c_0+c_1x+c_2x^2+\cdots,$$

deren Coefficienten aus den Gleichungen

$$c_0 = b_0,$$
$$c_1+a_1c_0 = b_1,$$
$$\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot$$
$$c_k+a_1c_{k-1}+\cdots+a_kc_0 = b_k,$$
$$c_\lambda+a_1c_{\lambda-1}+\cdots+a_{k-1}c_{\lambda-k+1}+(a_k+\lambda-k)c_{\lambda-k} = b_\lambda \qquad (\lambda>k)$$

berechnet werden. Dass die Reihe im allgemeinen divergent ist, ergiebt sich später nebst den Bedingungen für ihre Convergenz. An Stelle des Integrals η führen wir jetzt k Integrale der Differentialgleichung (1.) ein:

$$(5.) \qquad \eta_m = t^{-1}\int_0^x \frac{h(x)}{x^{k+1}}\,t\,dx; \qquad (m=0,1,\dots,k-1)$$

der Integrationsweg verlasse den Nullpunkt mit $\arg x = \frac{2m\pi}{k}$ oder all-

gemeiner mit einem zwischen $\frac{(4m-1)\pi}{2k}$ und $\frac{(4m+1)\pi}{2k}$ gelegenen Argument; die Veränderliche x werde vorläufig auf den Sector $\mathfrak{S}_m$

$$\frac{(4m-1)\pi}{2k} < \arg x < \frac{(4m+1)\pi}{2k}$$

und auf die angrenzenden Sectoren

$$\frac{(4m-3)\pi}{2k} < \arg x < \frac{(4m-1)\pi}{2k}$$

und

$$\frac{(4m+1)\pi}{2k} < \arg x < \frac{(4m+3)\pi}{2k}$$

beschränkt. Statt η_m schreiben wir vorläufig einfach η. Setzt man

$$J_\nu = t^{-1}\int_0^x x^{\nu-k-1}t\,dx,$$

wo der Integrationsweg derselbe ist wie bei η, so erhält man durch partielle Integration

$$\int_0^x (1+a_1x+\cdots+a_kx^k)x^{\nu-k-1}t\,dx = x^\nu t-\nu\int_0^x x^{\nu-1}t\,dx$$

oder

$$J_\nu+a_1J_{\nu+1}+\cdots+a_{k-1}J_{\nu+k-1}+(a_k+\nu)J_{\nu+k} = x^\nu.$$

Der Ausdruck $\sum_{\nu=0}^{n} c_\nu x^\nu$ geht, wenn man vermittelst dieser Formel x^ν durch J_ν, $J_{\nu+1}$, ... ausdrückt und die Recursionsformeln für die c_ν benutzt, über in

$$c_0+c_1x+\cdots+c_nx^n = b_0J_0+b_1J_1+\cdots+b_nJ_n-B_1J_{n+1}-\cdots-B_kJ_{n+k};$$

daher ist

$$\eta = \sum_{\nu=0}^{\infty} b_\nu J_\nu = c_0+c_1x+\cdots+c_nx^n+B_1J_{n+1}+\cdots+B_kJ_{n+k}+b_{n+1}J_{n+1}+\cdots.$$

Setzt man

$$(6.)\qquad \eta = \sum_{\lambda=0}^{n} c_\lambda x^\lambda+\varepsilon_n x^n,$$

so ist, wenn man die Bezeichnung

$$g_0 = B_1+b_{n+1},\quad \ldots,\quad g_{k-1} = B_k+b_{n+k},\quad g_\mu = b_{n+\mu+1}\,(\mu \geqq k)$$

benutzt,

$$\varepsilon_n = x^{-n}\sum_{\mu=0}^{\infty} g_\mu J_{n+\mu+1}$$

oder

$$(7.)\quad \varepsilon_n = e^{\frac{1}{kx^k}+\cdots+\frac{a_{k-1}}{x}} x^{-a_k-1} \int_0^x \sum_{\mu=0}^{\infty} g_\mu v^\mu . e^{-\frac{1}{kv^k}-\cdots-\frac{a_{k-1}}{v}} v^{a_k+n-k} dv.$$

Durch die Substitution

$$\frac{1}{v^k} = \frac{1}{x^k}+w$$

erhält man

$$(8.)\quad \varepsilon_n = \frac{1}{k} x \int_0^\infty \sum_{\mu=0}^{\infty} g_\mu \left(\frac{x}{\sqrt[k]{1+x^k w}}\right)^\mu e^{-\frac{w}{k}-\sum_{\lambda=1}^{k-1}\frac{a_{k-\lambda}\left[(1+x^k w)^{\frac{\lambda}{k}}-1\right]}{\lambda x^\lambda}-\frac{a_k+n+1}{k}\log(1+x^k w)} dw.$$

Nehmen wir zunächst $\arg x = \frac{2m\pi}{k}$ an, so ist in (7.) der Integrationsweg die Verbindungsgerade der Punkte $v = 0$ und $v = x = |x| e^{\frac{2m\pi i}{k}}$; dann ist nach Einführung von w in (8.) der Integrationsweg die von $w = 0$ mit dem Argument $-2m\pi$ ins Unendliche gehende Gerade. Hält man diesen Integrationsweg fest, während sich x in der Umgebung von $x = 0$ bewegt, so ändert sich das Integral (8.) stetig, so lange nicht für einen Punkt w auf dem Integrationswege $1+x^k w = 0$ wird. Dies tritt erst dann ein, wenn das Argument von $x^k w$, welches anfangs den Werth Null hatte, gleich $-\pi$ oder π wird, d. h. wenn $\arg x$ gleich $\frac{(2m-1)\pi}{2k}$ oder $\frac{(2m+1)\pi}{2k}$ wird. Nehmen wir für $\arg x$ wieder den anfänglichen Werth $\frac{2m\pi}{k}$ an und lassen wir den Integrationsweg von (8.) statt mit $\arg w = -2m\pi$ mit

$$-2m\pi - \frac{\pi}{2} < \arg w < -2m\pi + \frac{\pi}{2}$$

ins Unendliche gehen, so bleibt das Integral (8.) ungeändert. Hält man $\arg w = -\omega$ fest, so ändert sich das Integral stetig, so lange $\arg x$ zwischen $\frac{\omega-\pi}{k}$ und $\frac{\omega+\pi}{k}$ bleibt. Lässt man nun ω zwischen $2m\pi - \frac{\pi}{2}$ und $2m\pi + \frac{\pi}{2}$ variiren, so sieht man, dass die Function ε_n durch (8.) als stetige Function von x definirt wird, so lange

$$\frac{(4m-3)\pi}{2k} < \arg x < \frac{(4m+3)\pi}{2k}$$

ist, d. h. in dem Sector $\mathfrak{S}_m$ und den angrenzenden Sectoren $\mathfrak{T}_m$ und $\mathfrak{T}_{m+1}$.

Wir setzen

$$w = re^{i\varphi}, \quad x = \varrho e^{i\vartheta}$$

und beschränken φ auf das Gebiet

$$-2m\pi - \frac{\pi - k\delta}{2} < \varphi < -2m\pi + \frac{\pi - k\delta}{2},$$

wo δ eine beliebig kleine positive Grösse bedeutet; wir beschränken ϑ so, dass

$$-\pi + \frac{k\delta}{2} < k\vartheta + \varphi < \pi - \frac{k\delta}{2}$$

wird, woraus sich das Gebiet von ϑ

$$\frac{(4m-3)\pi}{2k} + \delta < \arg x < \frac{(4m+3)\pi}{2k} - \delta$$

ergiebt, welches $\mathfrak{G}_\delta$ heissen möge. Wir weisen auf Grund der Formel (8.) nach, dass $\left|\frac{s_n}{x}\right|$ unterhalb einer endlichen Grenze A bleibt, wenn ϱ hinreichend klein angenommen wird und ϑ zwischen den angegebenen Grenzen bleibt.

Da der Convergenzradius der Potenzreihe $\sum_{\mu=0}^{\infty} g_\mu x^\mu$ grösser als $\mathfrak{r}$ vorausgesetzt ist, so ist eine positive Grösse g so vorhanden, dass $|g_\mu|\mathfrak{r}^\mu < g$ und demnach für $\varrho = |x| < \mathfrak{r}$

$$\left|\sum_{\mu=0}^{\infty} g_\mu x^\mu\right| < \frac{g}{1-\frac{\varrho}{\mathfrak{r}}}$$

ist. Es ist

$$|1+x^k w| = \sqrt{1+(\varrho^k r)^2 + 2\varrho^k r\cos(k\vartheta+\varphi)}$$

$$\geqq \sqrt{1+(\varrho^k r)^2 - 2\varrho^k r\cos\frac{k\delta}{2}} \geqq \sin\frac{k\delta}{2}.$$

Wenn

$$\varrho \leqq \alpha\mathfrak{r}\sqrt[k]{\sin\frac{k\delta}{2}}$$

angenommen wird, wo α einen echten Bruch bedeutet, ist

$$\left|\frac{x}{\sqrt[k]{1+x^k w}}\right| \leqq \alpha\mathfrak{r}$$

und demnach

$$\left|\sum_{\mu=0}^{\infty} g_\mu x^\mu (1+x^k w)^{-\frac{\mu}{k}}\right| \leqq \frac{g}{1-\alpha}.$$

Ferner ist der reelle Theil $\mathfrak{R}$ von

$$-\frac{w}{k} - \sum_{\lambda=1}^{k} \frac{a_{k-\lambda}\left[(1+x^k w)^{\frac{\lambda}{k}} - 1\right]}{\lambda x^\lambda} - \frac{a_k+n+1}{k}\log(1+x^k w)$$

kleiner als der reelle Theil $-\frac{r\cos\varphi}{k}$ des ersten Gliedes vermehrt um die Summe der absoluten Beträge der übrigen Glieder. Wenn φ zwischen den angegebenen Grenzen bleibt, so ist

$$-\frac{r\cos\varphi}{k} < -\frac{r\sin\frac{k\delta}{2}}{k}.$$

Die Function

$$\frac{(1+z^{\frac{k}{\lambda}})^{\frac{\lambda}{k}}-1}{z}, \qquad (\lambda=1,\ldots,k-1)$$

welche dadurch eindeutig fixirt ist, dass für reelle positive z der reelle positive Werth gewählt und dass die vom Nullpunkt mit $\arg z = \frac{\lambda\pi}{k}$ bez. $-\frac{\lambda\pi}{k}$ ins Unendliche gehenden Geraden nicht überschritten werden, bleibt dem absoluten Betrage nach unter einer endlichen Grenze M_λ; es ist also, da $\arg(x^\lambda w^{\frac{\lambda}{k}}) = \frac{\lambda}{k}(k\vartheta+\varphi)$ zwischen $-\frac{\lambda\pi}{k}$ und $\frac{\lambda\pi}{k}$ bleibt,

$$\left|\frac{(1+x^k w)^{\frac{\lambda}{k}}-1}{x^\lambda w^{\frac{\lambda}{k}}}\right| \leqq M_\lambda$$

und

$$\left|\frac{(1+x^k w)^{\frac{\lambda}{k}}-1}{x^\lambda}\right| \leqq M_\lambda r^{\frac{\lambda}{k}}.$$

Schliesslich ist

$$|\log(1+x^k w)| \leqq |\log|1+x^k w|| + |\arg(1+x^k w)|$$
$$\leqq \log(1+\mathfrak{r}^k r) - \log\sin\frac{k\delta}{2} + \pi,$$

da für $|x| < \mathfrak{r}$

$$\sin\frac{k\delta}{2} < |1+x^k w| < 1+\mathfrak{r}^k r$$

ist. Es ist demnach

$$\mathfrak{R} < -\frac{r\sin\frac{k\delta}{2}}{k} + \sum_{\lambda=1}^{k-1} \frac{|a_{k-\lambda}|}{\lambda} M_\lambda r^{\frac{\lambda}{k}} + \frac{|a_k|+n+1}{k}\left(\log(1+\mathfrak{r}^k r)+\pi-\log\sin\frac{k\delta}{2}\right).$$

Daraus folgt

$$\left|\frac{\varepsilon_n}{x}\right| < \frac{g e^{\frac{|a_k|+n+1}{k}\left(\pi-\log\sin\frac{k\delta}{2}\right)}}{k(1-\alpha)} \int_0^\infty e^{-\frac{r\sin\frac{k\delta}{2}}{k}+\sum\limits_{\lambda=1}^{k-1}\frac{|a_{k-\lambda}|}{\lambda}M_\lambda r^{\frac{\lambda}{k}}+\frac{|a_k|+n+1}{k}\log(1+\mathfrak{r}^k r)} dr.$$

Die rechte Seite ist ein nur von δ abhängiger Ausdruck, welcher einen endlichen Werth A besitzt, wenn für δ ein von Null verschiedener Werth gewählt wird. Nach Angabe einer beliebig kleinen positiven Grösse ε ist demnach eine positive Grösse ϱ_0 so angebbar, dass

$$|\varepsilon_n| < \varepsilon$$

ist für

$$|x| < \varrho_0, \quad \frac{(4m-3)\pi}{2k}+\delta < \arg x < \frac{(4m+3)\pi}{2k}-\delta.$$

Wir haben somit den Satz:

Die Function η_m wird durch die Reihe $S=\sum\limits_{\lambda=0}^{\infty} c_\lambda x^\lambda$ für $\lim x = 0$ *asymptotisch dargestellt und zwar gleichmässig für alle Argumente von x zwischen $\frac{(4m-3)\pi}{2k}+\delta$ und $\frac{(4m+3)\pi}{2k}-\delta$, wo δ eine beliebig kleine positive Grösse darstellt; d. h. nach Angabe einer beliebig kleinen positiven Grösse ε lässt sich eine positive Grösse ϱ_0 so bestimmen, dass für*

$$|x| < \varrho_0, \quad \frac{(4m-3)\pi}{2k}+\delta < \arg x < \frac{(4m+3)\pi}{2k}-\delta \qquad \left|\frac{\eta_m-\sum\limits_{\lambda=0}^{n} c_\lambda x^\lambda}{x^n}\right| < \varepsilon$$

ist.

Die k Integrale $\eta_0, \eta_1, \ldots, \eta_{k-1}$ der Differentialgleichung (1.) sind im allgemeinen nicht Fortsetzungen von einander, so dass durch dieselbe Reihe S in verschiedenen Theilen der Umgebung von $x=0$ verschiedene Functionen asymptotisch dargestellt werden. Im Falle $k=1$ gilt die asymptotische Darstellung des Integrals η der Differentialgleichung (1'.) durch die Reihe S gleichmässig für alle Argumente von x zwischen $-\frac{3\pi}{2}+\delta$ und $\frac{3\pi}{2}-\delta$.

Das allgemeine Integral der Differentialgleichung (1.) ist

$$y = Ct^{-1}+\eta_m,$$

wo C eine willkürliche Constante bedeutet. Geht x mit einem Argument zwischen $\frac{(4m-1)\pi}{2k}$ und $\frac{(4m+1)\pi}{2k}$ zur Grenze Null, so ist $\lim t^{-1} = \infty$, also $\lim y = \infty$, wenn C von Null verschieden ist. Demnach *ist* η_m *das einzige Integral, welches für* $\frac{(4m-1)\pi}{2k} < \arg x < \frac{(4m+1)\pi}{2k}$ *durch die Reihe S asymptotisch dargestellt wird. Für*

$$\frac{(4m+1)\pi}{2k}+\delta < \arg x < \frac{(4m+3)\pi}{2k}-\delta$$

wird dagegen jedes Integral von (1.) *mit Ausnahme des zu* $C = \infty$ *gehörigen durch die Reihe S gleichmässig asymptotisch dargestellt; denn es ist*

$$y = \sum_{\lambda=0}^{n} c_\lambda x^\lambda + \bar{\varepsilon}_n x^n, \quad \bar{\varepsilon}_n = \varepsilon_n + Cx^{-n}t^{-1},$$

und zwar convergirt $\bar{\varepsilon}_n$ in dem angegebenen Gebiet gleichmässig zur Grenze Null.

Die Differentiation der Gleichung (6.)

$$\eta = S_n + \varepsilon_n x^n,$$

wo $S_n = \sum_{\lambda=0}^{n} c_\lambda x^\lambda$ gesetzt ist, ergiebt

$$\frac{d\eta}{dx} = \frac{dS_n}{dx} + \varepsilon'_{n-1} x^{n-1}, \quad \varepsilon'_{n-1} = x\frac{d\varepsilon_n}{dx} + n\varepsilon_n.$$

Wir zeigen, dass $x\frac{d\varepsilon_n}{dx}$ im Gebiete $\mathfrak{G}_\delta$

$$\frac{(4m-3)\pi}{2k}+\delta < \arg x < \frac{(4m+3)\pi}{2k}-\delta$$

gleichmässig zur Grenze Null convergirt. Daraus, dass die Reihe S der Differentialgleichung (1.) formal genügt, folgt die Theilbarkeit von

$$\sum_{\lambda=1}^{n} \lambda c_\lambda x^{\lambda+k} + g(x) \sum_{\lambda=1}^{n+k} c_\lambda x^\lambda - h(x)$$

durch x^{n+k+1} oder die Gleichung

$$x^{k+1}\frac{dS_n}{dx} + g(x) S_{n+k} = h(x) + x^{n+k+1}\mathfrak{P}(x),$$

wo $\mathfrak{P}(x)$ eine in der Umgebung von $x = 0$ convergente Potenzreihe be-

deutet. Setzt man auf der linken Seite der Differentialgleichung (1.)

$$\frac{d\eta}{dx} = \frac{d(S_n + \varepsilon_n x^n)}{dx}, \quad \eta = S_{n+k} + \varepsilon_{n+k} x^{n+k},$$

so erhält man

$$x\frac{d\varepsilon_n}{dx} + n\varepsilon_n + g(x)\varepsilon_{n+k} = x\mathfrak{P}(x),$$

woraus die Richtigkeit der Behauptung hervorgeht. Daher convergirt auch ε'_{n-1} im Sector $\mathfrak{S}_\delta$ gleichmässig zur Grenze Null, d. h. die Ableitung $\frac{d\eta}{dx}$ wird durch die Reihe $\frac{dS}{dx}$, welche man durch formale Differentiation der Reihe S erhält, asymptotisch dargestellt.

Aehnlich findet man

$$\frac{d^\nu \eta_m}{dx^\nu} = \frac{d^\nu S_n}{dx^\nu} + \varepsilon^{(\nu)}_{n-\nu} x^{n-\nu},$$

wo $\varepsilon^{(\nu)}_{n-\nu}$ im Gebiete $\mathfrak{S}_\delta$ gleichmässig zur Grenze Null convergirt. Für $\nu = n$ hat man

$$\frac{d^\nu \eta_m}{dx^\nu} = \nu!c_\nu + \varepsilon^{(\nu)}_0,$$

d. h. *die ν-te Ableitung von η_m convergirt für* $\lim x = 0$ *zur Grenze* $\nu!c_\nu$ *gleichmässig für alle Argumente von x zwischen*

$$\frac{(4m-3)\pi}{2k} + \delta \quad \textit{und} \quad \frac{(4m+3)\pi}{2k} - \delta.$$

§ 2.

Um eine convergente Reihenentwickelung für das Integral

$$\eta_m (m = 0, \quad 1, \quad \ldots, \quad k-1)$$

der Differentialgleichung (1.) zu erhalten, zunächst unter der Voraussetzung, *dass a_k keine ganze Zahl* ist, setzen wir

$$\int_0^x \frac{h(x)}{x^{k+1}} t\,dx = \int_0^{\mathfrak{r}e^{\frac{2m\pi i}{k}}} \frac{h(x)}{x^{k+1}} t\,dx + \int_{\mathfrak{r}e^{\frac{2m\pi i}{k}}}^x \frac{h(x)}{x^{k+1}} t\,dx;$$

$\mathfrak{r}$ ist beliebig, aber kleiner als der Convergenzradius der Potenzreihe $h(x)$, x wird innerhalb des Convergenzbezirks von $h(x)$ und $\arg x$ vorläufig gleich $2m\pi$ angenommen und die Integrationswege geradlinig vorausgesetzt.

Wir haben die convergente Entwicklung

$$(9.)\qquad \frac{h(x)}{x^{k+1}}\, e^{-\left(\frac{1}{kx^k}+\frac{a_1}{(k-1)x^{k-1}}+\cdots+\frac{a_{k-1}}{x}\right)} = \sum_{\lambda=-\infty}^{\lambda=+\infty} q_\lambda x^\lambda$$

und demnach

$$\int_{\mathfrak{r}e^{\frac{2m\pi i}{k}}}^{x} \frac{h(x)}{x^{k+1}}\, t\,dx = \int_{\mathfrak{r}e^{\frac{2m\pi i}{k}}}^{x} \sum_\lambda q_\lambda x^{\lambda+a_k} dx = \sum_\lambda \frac{q_\lambda x^{\lambda+a_k+1}}{\lambda+a_k+1} - \sum_\lambda \frac{q_\lambda e^{(\lambda+a_k+1)\left(\log\mathfrak{r}+\frac{2m\pi i}{k}\right)}}{\lambda+a_k+1}.$$

Unter Anwendung der Bezeichnung

$$(10.)\qquad P(x) = \sum_{\lambda=-\infty}^{\lambda=+\infty} \frac{q_\lambda x^{\lambda+a_k+1}}{\lambda+a_k+1}\cdot e^{\frac{1}{kx^k}+\cdots+\frac{a_{k-1}}{x}} = \sum_{\lambda=-\infty}^{\lambda=+\infty} p_\lambda x^\lambda,$$

$$(11.)\qquad A_m = \int_0^{\mathfrak{r}e^{\frac{2m\pi i}{k}}} \frac{h(x)}{x^{k+1}}\, t\,dx - \sum_{\lambda=-\infty}^{\lambda=+\infty} \frac{q_\lambda e^{(\lambda+a_k+1)\left(\log\mathfrak{r}+\frac{2m\pi i}{k}\right)}}{\lambda+a_k+1},$$

wo $P(x)$ eine in der Umgebung von $x = 0$ (abgesehen von $x = 0$) convergente *Laurent*sche Reihe und $A_m (m = 0, 1, \ldots, k-1)$ eine Constante bedeutet, haben wir

$$(12.)\qquad \eta_m = P(x) + A_m t^{-1}.$$

Durch Angabe von $\arg x$ zur Festlegung des Werthes von x^{-a_k} ist durch die Formel (12.) die zunächst für $\arg x = \frac{2m\pi}{k}$ definirte Function η_m in der ganzen Umgebung von $x = 0$ fixirt.

Nach (12.) besteht zwischen η_m und η_{m-1} der Zusammenhang

$$(13.)\qquad \eta_m = \eta_{m-1} + (A_m - A_{m-1})t^{-1},$$

der sich auch aus der Formel (5.) folgendermassen ergiebt. Wir setzen

$$(14.)\qquad \omega_m = \int_{l_m} \frac{h(x)}{x^{k+1}}\, t\,dx;$$

der Integrationsweg l_m besteht aus der den Punkt $x = 0$ mit $x = \mathfrak{r}e^{\frac{2(m-1)\pi}{k}}$ verbindenden Geraden*), einem Kreisbogen vom Mittelpunkte $x = 0$, welcher die Punkte $x = \mathfrak{r}e^{\frac{2(m-1)\pi i}{k}}$ und $x = \mathfrak{r}e^{\frac{2m\pi i}{k}}$ verbindet, und einer von letzterem Punkte nach $x = 0$ gehenden Geraden. Dann ist, wenn etwa $\arg x = \frac{2m\pi}{k}$

*) Der Werth von t ist durch $\arg x = \frac{2(m-1)\pi}{k}$ am Anfange von l_m fixirt.

gewählt wird,

$$\omega_m = \int_0^{x'} \frac{h(x)}{x^{k+1}}\, t\, dx - \int_0^{x} \frac{h(x)}{x^{k+1}}\, t\, dx,$$

wenn $\int_0^x$ über die gerade Linie $0\dots x$ erstreckt wird, während auf dem Integrationswege von $\int_0^{x'}$ $\arg x$ von $\frac{2(m-1)\pi}{k}$ bis $\frac{2m\pi}{k}$ zunimmt. Durch Multiplication mit t^{-1} erhält man

$$\eta_m = \eta_{m-1} - \omega_m t^{-1}, \tag{15.}$$

also

$$\omega_m = A_{m-1} - A_m.$$

Für $m = k$ hat man

$$\omega_k = A_{k-1} - A_k;$$

da

$$\eta_0 = P(x) + A_0 t^{-1} \quad (\arg x = 0),$$
$$\eta_k = P(x) + A_k t^{-1} \quad (\arg x = \pi)$$

und $\eta_k = \eta_0$ ist, so haben wir

$$A_k = A_0 e^{2\pi i a_k},$$

also

$$\omega_k = A_{k-1} - A_0 e^{2\pi i a_k}.$$

Die Addition der Gleichungen

$$\omega_m = A_{m-1} - A_m \quad (m = m,\quad m+1,\quad \dots,\quad m+k-1)$$

ergiebt

$$\omega_m + \omega_{m+1} + \dots + \omega_{m+k-1} = A_{m-1} - A_{m+k-1},$$

worin

$$\omega_{k+1} = e^{2\pi i a_k} \omega_1, \quad \dots; \quad A_{m+k-1} = e^{2\pi i a_k} A_{m-1}$$

zu setzen ist, also

$$\omega_m + \dots + \omega_k + e^{2\pi i a_k}(\omega_1 + \dots + \omega_{m-1}) = A_{m-1}(1 - e^{2\pi i a_k}). \quad (m = 1, 2, \dots, k)$$

Bei einem positiven Umlaufe der Veränderlichen um $x = 0$ geht η_m über in

$$\bar{\eta}_m = P(x) + A_m e^{-2\pi i a_k} t^{-1},$$

es ist also

$$\bar{\eta}_m = \eta_m + A_m(e^{-2\pi i a_k} - 1) t^{-1},$$

wenn für t der ursprüngliche Werth,

$$\bar{\eta}_m = \eta_m + A_m(1-e^{2\lambda i\alpha_k})t^{-1},$$

wenn für t der durch die Umdrehung erlangte Werth gesetzt wird.

Die Bedingungen für die Convergenz der in § 1 betrachteten Reihe S ergeben sich nun folgendermassen. Ist die Reihe S für hinreichend kleine Werthe von $|x|$ convergent, so haben wir die in der Umgebung von $x=0$ eindeutige Function

$$\eta = S = \sum_{\lambda=0}^{\infty} c_\lambda x^\lambda.$$

Da es nur die eine Function

$$\eta_m = P(x) + A_m t^{-1}$$

giebt, welche in dem Sector $\mathfrak{S}_m$ durch die Reihe S asymptotisch dargestellt wird, so muss $\eta_m = S$, also $P(x) = S$ und $A_m = 0$ sein. Die Bedingungen $A_0 = 0$, $A_1 = 0$, $\ldots$, $A_{k-1} = 0$ sind aber auch hinreichend für die Convergenz der Reihe S; denn wenn sie erfüllt sind, wird die in der Umgebung von $x=0$ eindeutige Function $P(x)$ in der ganzen Umgebung von $x=0$ durch die Reihe S gleichmässig asymptotisch dargestellt; d. h. nach Angabe einer beliebig kleinen positiven Grösse ε lässt sich eine positive Grösse ϱ_0 so bestimmen, dass für $|x| < \varrho_0$ der absolute Betrag von

$$\varepsilon_n = \frac{P(x) - \sum_{\lambda=0}^{n} c_\lambda x^\lambda}{x^n}$$

kleiner als ε ist. Es sei

$$P(x) = G\left(\frac{1}{x}\right) + \mathfrak{P}(x),$$

wo $G\left(\frac{1}{x}\right)$ eine ganze Function von $\frac{1}{x}$ und $\mathfrak{P}(x)$ eine für hinreichend kleine Werthe von $|x|$ convergente Potenzreihe darstellt. Da eine ganze transcendente Function $G\left(\frac{1}{x}\right)$ für $|x| < \varrho_0$ beliebig grosse Werthe annimmt, so klein auch ϱ_0 gewählt wird, so würde auch ε_n für $|x| < \varrho_0$ beliebig gross werden können, wenn nicht $G\left(\frac{1}{x}\right)$ eine ganze rationale Function von $\frac{1}{x}$ wäre. Enthielte $G\left(\frac{1}{x}\right)$ negative Potenzen von x in endlicher Anzahl, so würde ε_n für $x=0$ unendlich werden. Die in der Umgebung von $x=0$ convergente Reihe $P(x)$ darf also nur positive Potenzen von x ent-

halten und muss daher mit S übereinstimmen. Die Bedingungen $A_0 = 0$, $A_1 = 0, \ldots, A_{k-1} = 0$ sind identisch mit den Bedingungen $\omega_1 = 0, \ldots \ldots, \omega_k = 0$.

Wenn a_k keine ganze Zahl ist, so besitzen die Functionen $\eta_m (m = 0, 1, \ldots, k-1)$ in der Umgebung von $x = 0$ Entwicklungen von der Form

$$\eta_m = P(x) + A_m t^{-1},$$

wo $P(x)$ das einzige in der Umgebung von $x = 0$ eindeutige Integral der Differentialgleichung darstellt. Die nothwendige und hinreichende Bedingung für die Convergenz der Reihe S besteht in dem Verschwinden der Grössen $A_0, A_1, \ldots, A_{k-1}$ oder, was dasselbe ist, der Grössen $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_k$.

Wir gehen zum *Falle eines ganzzahligen a_k*. Wenn wir etwa

$$\arg x = \frac{2m\pi}{k}$$

annehmen, so ist unter Beibehaltung der Bezeichnung (9.):

$$\int_0^x \frac{h(x)}{x^{k+1}} t\,dx = \int_0^{\mathfrak{r}e^{\frac{2m\pi i}{k}}} \frac{h(x)}{x^{k+1}} t\,dx + \int_{\mathfrak{r}e^{\frac{2m\pi i}{k}}}^x \frac{h(x)}{x^{k+1}} t\,dx$$

$$= \int_0^{\mathfrak{r}e^{\frac{2m\pi i}{k}}} \frac{h(x)}{x^{k+1}} t\,dx + \sum_\lambda{}' \frac{q_\lambda x^{\lambda+a_k+1}}{\lambda+a_k+1} - \sum_\lambda{}' \frac{q_\lambda e^{(\lambda+a_k+1)\left(\log\mathfrak{r}+\frac{2m\pi i}{k}\right)}}{\lambda+a_k+1}$$

$$+ q_{-(a_k+1)} \log x - q_{-(a_k+1)}\left(\log\mathfrak{r} + \frac{2m\pi i}{k}\right);$$

dabei bedeutet Σ' eine über alle ganzen positiven und negativen Werthe von λ mit Ausnahme von $\lambda = -(a_k+1)$ erstreckte Summe. Setzt man

$$(16.)\quad \begin{cases} B = q_{-(a_k+1)} \\ A^{(m)} = \displaystyle\int_0^{\mathfrak{r}e^{\frac{2m\pi i}{k}}} \frac{h(x)}{x^{k+1}} t\,dx - \sum_\lambda{}' \frac{q_\lambda e^{(\lambda+a_k+1)\left(\log\mathfrak{r}+\frac{2m\pi i}{k}\right)}}{\lambda+a_k+1} - q_{-(a_k+1)}\left(\log\mathfrak{r}+\frac{2m\pi i}{k}\right) \end{cases}$$

und

$$(17.)\qquad P(x) = \sum_\lambda{}' \frac{q_\lambda x^{\lambda+1}}{\lambda+a_k+1} \cdot e^{\frac{1}{kx^k}+\cdots+\frac{a_{k-1}}{x}} = \sum_{\lambda=-\infty}^{\lambda=+\infty} p_\lambda x^\lambda,$$

so ist

$$(18.)\qquad \eta_m = P(x) + t^{-1}(A_m + B\log x). \qquad (m = 0, \ldots, k-1)$$

Bei einem positiven Umlaufe um $x=0$ geht η_m über in

$$\bar{\eta}_m = \eta_m + 2\pi i B t^{-1}.$$

Im Falle $B=0$ sind sämmtliche Integrale in der Umgebung von $x=0$ eindeutig; $P(x)$ selbst ist im allgemeinen kein Integral.

Im Falle der Convergenz der Reihe S ist $B=0$, weil sonst kein eindeutiges Integral vorhanden wäre; es ist also

$$\eta_m = P(x) + A_m t^{-1}.$$

Im Sector $\mathfrak{S}_m$ wird nur die eine Function η_m durch die Reihe S asymptotisch dargestellt, es muss also $\eta_m = S$ ($m = 0, 1, \ldots, k-1$), d. h.

$$A_0 = A_1 = \cdots = A_{m-1}$$

sein. Die gefundenen Bedingungen sind für die Convergenz der Reihe S hinreichend; denn wenn sie erfüllt sind, so wird die in der Umgebung von $x=0$ eindeutige Function

$$\eta = P(x) + A_0 t^{-1}$$

in der ganzen Umgebung von $x=0$ durch die Reihe S gleichmässig asymptotisch dargestellt, woraus die Convergenz der Reihe S folgt.

Die Grössen $\omega_1, \ldots, \omega_k$ können auch jetzt durch die Formel (14.) definirt werden; nur ist jetzt $\omega_1 + \cdots + \omega_k$ gleich dem über einen den Punkt $x=0$ umgebenden Kreis erstreckten Integral der Function

$$\frac{h(x)}{x^{k+1}} t = \sum_{\lambda=-\infty}^{\lambda=+\infty} q_\lambda x^{\lambda+a_k},$$

d. i. $q_{-(a_k+1)} . 2\pi i$, also

$$\omega_1 + \omega_2 + \cdots + \omega_k = 2\pi i B.$$

Wie früher hat man

$$\eta_m = \eta_{m-1} - \omega_m t^{-1}, \qquad (m = 0, \ldots, k-2)$$

aber auch

$$\eta_0 = \eta_{k-1} - \omega_k t^{-1}.$$

Andererseits ist

$$\eta_m = \eta_{m-1} + (A_m - A_{m-1}) t^{-1}; \qquad (m = 1, \ldots, k-1)$$

ferner

$$\begin{aligned} \eta_{k-1} &= P(x) + (A_{k-1} + B \log x) t^{-1}, \\ \eta_0 &= P(x) + (A_0 + B \log x - 2\pi i B) t^{-1}, \end{aligned}$$

wenn auf der positiven reellen Axe $\arg x = 2\pi$ angenommen wird, also

$$\eta_0 = \eta_{k-1} + (A_0 - A_{k-1} - 2\pi i B)t^{-1}.$$

Hieraus folgt

$$\omega_m = A_{m-1} - A_m, \qquad (m=1, \ldots, k-1)$$
$$\omega_k = A_{k-1} - A_0 + 2\pi i B,$$

so dass die Bedingungen für die Convergenz der Reihe S jetzt in der Form erscheinen:

$$\omega_m = 0. \qquad (m=1, 2, \ldots, k)$$

Ist a_k eine ganze Zahl, so ist

$$\eta_m = P(x) + (A_m + B\log x)t^{-1}. \qquad (m=0, 1, \ldots, k-1)$$

Die nothwendige und hinreichende Bedingung für die Convergenz der Reihe S ist $A_0 = A_1 = \cdots = A_k$, $B = 0$ oder, was dasselbe ist, $\omega_1 = 0, \ldots, \omega_k = 0$.

Im Falle $k = 1$ erfordert die Convergenz der Reihe S nur die Bedingung $B = 0$. Für das *Briot-Bouquet*sche Beispiel, welches unter geringfügiger Bezeichnungsveränderung lautet:

$$x^2 \frac{dy}{dx} + y = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \cdots,$$

ist

$$\sum_\lambda q_\lambda x^\lambda = \frac{b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \cdots}{x^2} e^{-\frac{1}{x}},$$

also

$$B = q_{-1} = b_1 - \frac{b_2}{1!} + \frac{b_3}{2!} - \frac{b_4}{3!} + - \cdots.$$

Die Bedingung für die Convergenz der Reihe S ist also

$$\sum_{\lambda=0}^{\infty} (-1)^\lambda \frac{b_{\lambda+1}}{\lambda!} = 0.$$

Unsere Constanten $A_0, A_1, \ldots, A_{k-1}$ stellen eine Verallgemeinerung der *Mascheroni*schen Constanten des Integrallogarithmus dar. Der Differentialgleichung

$$x^2 \frac{dy}{dx} + y = x$$

genügt die Function

$$\eta = e^{\frac{1}{x}} \int_0^x \frac{e^{-\frac{1}{x}} dx}{x},$$

wobei x reell positiv angenommen werden möge. Nach (16.) und (17.) ist $B = 1$ und

$$A = \int_0^1 \frac{e^{-\frac{1}{x}} dx}{x} + \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{(-1)^\nu}{\nu!\nu},$$

$$e^{-\frac{1}{x}} P(x) = -\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{(-1)^\nu}{\nu!\nu.x^\nu}.$$

Setzt man $x = -\frac{1}{z}$ und nimmt man z reell negativ an, so wird

$$e^{-\frac{1}{x}} \eta = -\int_{-\infty}^{z} \frac{e^z dz}{z} = -\mathrm{li}\, e^z,$$

und aus (18.)

$$e^{-\frac{1}{x}} \eta = -\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{(-1)^\nu}{\nu!\nu.x^\nu} + A + \log x$$

geht hervor:

$$\int_{-\infty}^{z} \frac{e^z dz}{z} = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{z^\nu}{\nu!\nu} - A + \log(-z);$$

darin ist

$$-A = \int_{-\infty}^{-1} \frac{e^z dz}{z} - \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{(-1)^\nu}{\nu!\nu}$$

die *Mascheroni*sche Constante.

§ 3.

Wir nehmen an, *dass a_k keine ganze Zahl sei* und dass $A_0, A_1, \ldots \ldots, A_{k-1}$ nicht sämmtlich verschwinden, und untersuchen das Verhalten des Integrals $P(x)$ der Differentialgleichung (1.) in der Umgebung der singulären Stelle $x = 0$. Es handelt sich zunächst um diejenigen in der Umgebung von $x = 0$ gelegenen Werthe von x, für welche $P(x)$ einen gegebenen Werth $c_0 - c$ annimmt*).

Wir haben

$$P(x) = \eta_m - A_m t^{-1};$$

*) Tritt an Stelle von $P(x)$ ein anderes Integral $y = P(x) + Ct^{-1}$ von (1.), so braucht man nur in der folgenden Betrachtung A_m durch $A_m - C$ zu ersetzen.

setzt man

$$\eta_m = c_0 + \gamma,$$

so convergiren γ und $x\frac{d\gamma}{dx}$ für $\lim x = 0$ zur Grenze Null gleichmässig für alle Argumente von x zwischen $\frac{(4m-3)\pi}{2k}+\delta$ und $\frac{(4m+3)\pi}{2k}-\delta$, wo δ eine beliebig kleine positive Grösse bedeutet. Wir beschränken uns vorläufig auf das Gebiet $\mathfrak{G}_\delta$

$$\frac{(4m-3)\pi}{2k}+\delta < \arg x < \frac{(4m+3)\pi}{2k}-\delta.$$

Setzt man

$$\frac{1}{kx^k}+\frac{a_1}{(k-1)x^{k-1}}+\cdots+\frac{a_{k-1}}{x}-a_k \log x = \frac{1+\alpha}{kx^k},$$

so convergiren α und $x\frac{d\alpha}{dx}$ für $\lim x = 0$ zur Grenze Null. Die Gleichung

$$P(x) = c_0 - c$$

schreibt sich

$$A_m e^{\frac{1+\alpha}{kx^k}} = c+\gamma$$

oder, wenn man von $A_m = 0$ und $c = 0$ absieht,

$$\frac{1+\alpha}{kx^k} = \log\frac{c}{A_m}+\log\left(1+\frac{\gamma}{c}\right)+2\lambda\pi i,$$

wo λ eine positive oder negative ganze Zahl darstellt. Setzt man

$$\frac{1}{1+\alpha}\left(1+\frac{\log\left(1+\frac{\gamma}{c}\right)}{\log\frac{c}{A_m}+2\lambda\pi i}\right) = \frac{1}{(1+\varphi_\lambda)^k},$$

so convergiren φ_λ und $x\frac{d\varphi_\lambda}{dx}$ im Sector $\mathfrak{G}_\delta$ gleichmässig zur Grenze Null, und unsere Gleichung lautet, wenn man

$$s_\lambda = \frac{1}{\sqrt[k]{k\left(\log\frac{c}{A_m}+2\lambda\pi i\right)}}$$

setzt,

$$x = s_\lambda(1+\varphi_\lambda).$$

Wird die $k$te Wurzel so fixirt, dass

$$\lim_{\lambda=-\infty} \arg s_\lambda = \frac{(4m-1)\pi}{2k}, \quad \lim_{\lambda=+\infty} \arg s_\lambda = \frac{(4m+1)\pi}{2k}$$

ist, so liegt s_λ für hinreichend grosse Werthe von $|\lambda|$ innerhalb des Sectors $\mathfrak{S}_\vartheta$. Wir verstehen unter ε eine beliebig kleine positive Grösse*) und zeigen, dass ein mit dem Radius $\varepsilon|s_\lambda|$ um $x = s_\lambda$ beschriebener Kreis $\mathfrak{C}$ eine einzige Wurzel x_λ der Gleichung $x = s_\lambda(1+\varphi_\lambda)$ umschliesst, wenn $|\lambda|$ hinreichend gross genommen wird. Wir beweisen nämlich, dass für hinreichend grosse Werthe von $|\lambda|$

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\mathfrak{C}} d\log(x-s_\lambda-s_\lambda\varphi_\lambda) = 1 = \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathfrak{C}} d\log(x-s_\lambda)$$

ist, wenn die Integrale über den Kreisumfang $\mathfrak{C}$ erstreckt werden. Wenn gezeigt wird, dass

$$\int_{\mathfrak{C}} d\log(x_\lambda-s_\lambda-s_\lambda\varphi_\lambda) - \int_{\mathfrak{C}} d\log(x-s_\lambda) = \int_{\mathfrak{C}} \frac{s_\lambda\left[\varphi_\lambda-(x-s_\lambda)\frac{d\varphi_\lambda}{dx}\right]}{(x-s_\lambda)(x-s_\lambda-s_\lambda\varphi_\lambda)}\,dx$$

beliebig klein wird, wenn man $|\lambda|$ hinreichend gross nimmt, so muss der Ausdruck seiner Bedeutung zufolge verschwinden. Der absolute Betrag des letzten Integrals ist nicht grösser als das Product aus der Länge $2\pi\varepsilon|s_\lambda|$ des Integrationsweges und dem Maximum des absoluten Betrages der zu integrirenden Function auf dem Kreisumfange $\mathfrak{C}$. Nun wird aber für $|x-s_\lambda| = \varepsilon|s_\lambda|$ der Zähler dieser Function dem absoluten Betrage nach kleiner als $|s_\lambda|\varepsilon\eta$**), wenn $|\lambda|$ hinreichend gross ist; der absolute Betrag des Nenners ist grösser als

$$\varepsilon|s_\lambda|.(\varepsilon|s_\lambda|-|s_\lambda|\times \text{Max. von } |\varphi_\lambda| \text{ auf } \mathfrak{C})$$

oder, da $|\varphi_\lambda|$ für hinreichend grosse Werthe von $|\lambda|$ auf dem Kreise $\mathfrak{C}$ kleiner als $\varepsilon\eta$ ist, grösser als $\varepsilon^2|s_\lambda|^2(1-\eta)$.

Demnach ist das Integral dem absoluten Betrage nach kleiner als

$$2\pi\varepsilon|s_\lambda|\cdot\frac{|s_\lambda|\varepsilon\eta}{\varepsilon^2|s_\lambda|^2(1-\eta)} = \frac{2\pi\eta}{1-\eta},$$

d. h. beliebig klein, wenn $|\lambda|$ hinreichend gross wird, w. z. b. w.

---

*) ε ist so klein zu nehmen, dass $\mathfrak{C}$ innerhalb des Sectors $\mathfrak{S}_\vartheta$ liegt.

**) η ist eine beliebig kleine positive Grösse.

Die Gleichung $P(x) = c_0 - c$ hat also in dem Sector $\mathfrak{S}_\delta$ unendlich viele Wurzeln $x_\lambda (\lim \lambda = \mp \infty)$. Setzt man $x_\lambda = s_\lambda(1+\varepsilon_\lambda)$ oder

$$x_\lambda = \frac{1+\varepsilon_\lambda}{\sqrt[k]{k\left(\log \frac{c}{A_m} + 2\lambda\pi i\right)}},$$

so ist

$$\lim_{\lambda=\pm\infty} \varepsilon_\lambda = 0$$

und daher

$$\lim_{\lambda=-\infty} \arg x_\lambda = \frac{(4m-1)\pi}{2k}, \quad \lim_{\lambda=+\infty} \arg x_\lambda = \frac{(4m+1)\pi}{2k}.$$

In dem bisher ausgeschlossenen Falle $A_m = 0$ ist

$$P(x) = c_0 + \gamma,$$

so dass die Gleichung $P(x) = c_0 - c$ im Sector $\mathfrak{S}_\delta$ keine Wurzeln von beliebig kleinem absoluten Betrag besitzen kann, wenn c von Null verschieden ist.

Betrachten wir nun den Werth $c = 0$, d. h. die Gleichung $P(x) = c_0$. Es sei c_ϱ der nächste auf c_0 folgende Coefficient der Reihe S, welcher nicht verschwindet*), so dass, wenn wir

$$\eta_m = c_0 + (c_\varrho + \gamma)x^\varrho$$

setzen, γ und $x\frac{d\gamma}{dx}$ im Sector $\mathfrak{S}_\delta$ gleichmässig zur Grenze Null convergiren. Die Gleichung $P(x) = c_0$ schreibt sich

$$A_m e^{\frac{1}{kx^k}+\cdots+\frac{a_{k-1}}{x}} x^{-a_k-\varrho} = c_\varrho + \gamma$$

oder

$$A_m e^{\frac{1+\alpha}{kx^k}} = c_\varrho + \gamma,$$

wo $\lim\limits_{x=0} \alpha = 0$, $\lim\limits_{x=0} x\frac{d\alpha}{dx} = 0$ ist.

Durch die früheren Schlüsse erhält man die Wurzeln

$$x_\lambda = \frac{1+\varepsilon_\lambda}{\sqrt[k]{k\left(\log \frac{c_\varrho}{A_m} + 2\lambda\pi i\right)}}, \quad \lim_{\lambda=\pm\infty} \varepsilon_\lambda = 0.$$

*) Der Fall, dass die Reihe S convergirt, ist ausgeschlossen.

Ist $A_m = 0$, so nähert sich zwar $P(x)$ der Grenze c_0, wenn x im Sector $\mathfrak{S}_\delta$ zur Grenze Null geht, nimmt aber den Werth c_0 in der Nähe von $x = 0$ nicht an.

Es bleibt noch $c = \infty$ zu betrachten. Dass es in der Umgebung von $x = 0$ (abgesehen von $x = 0$ selbst) keinen Werth von x geben kann, für welchen $P(x) = \infty$ wird, geht aus der Entwickelung von $P(x)$ in eine *Laurent*sche Reihe hervor. Indessen convergirt $P(x)$ für $\lim x = 0$ zur Grenze ∞ gleichmässig für

$$\frac{(4m-1)\pi}{2k} + \delta < \arg x < \frac{(4m+1)\pi}{2k} - \delta,$$

wenn unter δ eine beliebig kleine positive Grösse verstanden wird.

Es sei nun a_k eine ganze Zahl, die Reihe S nicht convergent. Die Function $P(x)$ stellt, wenn B von Null verschieden ist, kein Integral der Differentialgleichung dar. Ist

$$y = \eta_m + Ct^{-1}$$

ein beliebiges Integral und handelt es sich um die Gleichung $y = c_0 - c$, so braucht man nur im Bisherigen A_m durch $-C$ zu ersetzen. Will man indessen unter der Voraussetzung $B \neq 0$ die Gleichung $P(x) = c_0 - c$ untersuchen, so setzt man

$$P(x) = \eta_m - t^{-1}(A_m + B\log x)$$

und

$$t^{-1}(A_m + B\log x) = Be^{\frac{1+\alpha}{kx^k}},$$

wo $\lim_{x=0} \alpha = 0$, $\lim_{x=0} x\frac{d\alpha}{dx} = 0$ ist. Die Gleichung $P(x) = c_0 - c$ schreibt sich

$$Be^{\frac{1+\alpha}{kx^k}} = c + \gamma;$$

wie oben findet man

$$x_\lambda = \frac{1+\varepsilon_\lambda}{\sqrt[k]{k\left(\log\frac{c}{B} + 2\lambda\pi i\right)}}, \quad \lim_{\lambda=\pm\infty} \varepsilon_\lambda = 0.$$

Auch die Fälle $c = 0$ und $c = \infty$ erledigen sich wie oben.

Die Function $P(x)$ nimmt in der Umgebung von $x = 0$ jeden endlichen Werth $c_0 - c$ unendlich oft an, nämlich für die Werthe $x = x_\lambda^{(m)}$ ($m = 0, 1, \ldots$

$\ldots, k-1$; $\lim \lambda = \pm \infty$), ***und zwar ist***

$$\lim_{\lambda=-\infty} \arg x_\lambda^{(m)} = \frac{(4m-1)\pi}{2k}, \quad \lim_{\lambda=+\infty} \arg x_\lambda^{(m)} = \frac{(4m+1)\pi}{2k} \text{*)}.$$

Wenn x zur Grenze Null geht, convergirt $P(x)$ für

$$\frac{(4m+1)\pi}{2k} + \delta < \arg x < \frac{(4m+3)\pi}{2k} - \delta$$

gleichmässig zur Grenze c_0 und für

$$\frac{(4m-1)\pi}{2k} + \delta < \arg x < \frac{(4m+1)\pi}{2k} - \delta$$

gleichmässig zur Grenze ∞.

Wir bringen die in der Umgebung von $x=0$ eindeutige Function $P(x)$ mit der durch *Weierstrass* begründeten Theorie der ganzen transcendenten Functionen in Verbindung**). Versteht man jetzt unter $x_\lambda^{(m)}$ die Nullstellen von $P(x)$, so ist die Reihe $\sum_\lambda |x_\lambda^{(m)}|^k$ divergent, die Reihe $\sum_\lambda |x_\lambda^{(m)}|^{k+1}$ convergent. Es ist nämlich

$$x_\lambda^{(m)} = \frac{1+\varepsilon_\lambda}{\sqrt[k]{k\left(\log \frac{c_0}{A_m} + 2\lambda\pi i\right)}}, \quad \lim_{\lambda=\infty} \varepsilon_\lambda = 0 \text{***)}$$

$$= \frac{1+\delta_\lambda}{\sqrt[k]{2\lambda\pi i k}}, \quad \lim_{\lambda=\infty} \delta_\lambda = 0,$$

also

$$2\pi k . \sum_\lambda |x_\lambda^{(m)}|^k = \sum_\lambda \frac{|1+\delta_\lambda|^k}{\lambda} = \sum_\lambda \frac{1+\delta'_\lambda}{\lambda}, \quad \lim_{\lambda=\infty} \delta'_\lambda = 0,$$

$$(2\pi k)^{\frac{k+1}{k}} . \sum_\lambda |x_\lambda^{(m)}|^{k+1} = \sum_\lambda \frac{|1+\delta_\lambda|^{k+1}}{\lambda^{1+\frac{1}{k}}} = \sum_\lambda \frac{1+\delta''_\lambda}{\lambda^{1+\frac{1}{k}}}, \quad \lim_{\lambda=\infty} \delta''_\lambda = 0;$$

für $\lambda > l$ sind $|\delta'_\lambda|$ und $|\delta''_\lambda|$ kleiner als die beliebig kleine positive Grösse

---

*) Im Falle $A_m = 0$ fallen die Werthe $x_\lambda^{(m)} (\lim \lambda = \pm \infty)$ fort und $P(x)$ convergirt für $\arg x$ zwischen $\frac{(4m-3)\pi}{2} + \delta$ und $\frac{(4m+3)\pi}{2k} - \delta$ gleichmässig zur Grenze c_0. Ist a_k eine ganze Zahl, so tritt diese Abänderung des Hauptsatzes nur ein, wenn $A_m = 0$ und $B = 0$ ist.

**) Die Reihe S soll nicht convergent sein.

***) Ist $c_0 = 0$ oder a_k eine ganze Zahl, so bleiben trotz der Abänderung dieser Formel die folgenden Schlüsse ungeändert. In den nächsten Zeilen nehmen wir $\lambda > 0$ an; für $\lambda < 0$ gilt dasselbe.

δ, also ist

$$2\pi k.\sum_{\lambda>l}|x_\lambda^{(m)}|^k \geqq (1-\delta)\sum_{\lambda>l}\frac{1}{\lambda}, \quad (2\pi k)^{\frac{k+1}{k}}.\sum_{\lambda>l}|x_\lambda^{(m)}|^{k+1} \leqq (1+\delta)\sum_{\lambda>l}\frac{1}{\lambda^{1+\frac{1}{k}}}.$$

Wir bezeichnen mit $\varepsilon_\nu(\nu = 1, 2, \ldots, \infty)$ diejenigen Nullstellen $x_\lambda^{(m)}$ $(m = 0, 1, \ldots, k-1)$ von $P(x)$, deren absoluter Betrag kleiner als die unterhalb des Convergenzradius der Reihe $P(x)$ beliebig anzunehmende positive Grösse r ist; dann ist $\sum_\nu|\varepsilon_\nu|^k$ divergent, $\sum_\nu|\varepsilon_\nu|^{k+1}$ convergent, so dass das unendliche Product

$$\text{(19.)} \qquad \Pi\left(\frac{1}{x}\right) = \prod_{\nu=1}^{\infty}\left(1-\frac{\varepsilon_\nu}{x}\right)e^{\frac{\varepsilon_\nu}{x}+\frac{1}{2}\left(\frac{\varepsilon_\nu}{x}\right)^2+\cdots+\frac{1}{k}\left(\frac{\varepsilon_\nu}{x}\right)^k}$$

für jeden von Null verschiedenen Werth von x convergirt.

$$F(x) = \frac{P(x)}{\Pi\left(\frac{1}{x}\right)}$$

ist eine in der Umgebung von $x = 0$ eindeutige Function, welche für $0 < |x| < r$ von Nullstellen frei ist, deren logarithmische Ableitung sich also in eine für $0 < |x| < r$ convergente *Laurent*sche Reihe entwickeln lässt:

$$\frac{d\log F(x)}{dx} = \frac{s}{x} + \frac{dg\left(\frac{1}{x}\right)}{dx} + \frac{d\mathfrak{P}_0(x)}{dx},$$

wo

$$g\left(\frac{1}{x}\right) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_\nu}{x^n}$$

eine beständig convergente Potenzreihe von $\frac{1}{x}$ und $\mathfrak{P}_0(x)$ eine für $|x| < r$ convergente Potenzreihe von x darstellt; daraus folgt

$$F(x) = x^s e^{g\left(\frac{1}{x}\right)}\mathfrak{P}(x),$$

wo $\mathfrak{P}(x) = Ce^{\mathfrak{P}_0(x)}$ für $|x| < r$ keine Nullstellen besitzt. Wir haben demnach

$$\text{(20.)} \qquad P(x) = x^s e^{g\left(\frac{1}{x}\right)}\Pi\left(\frac{1}{x}\right)\mathfrak{P}(x),$$

und zwar muss s wegen der Eindeutigkeit von $P(x)$ eine ganze Zahl sein.

Aus Formel (12.)*)

$$P(x) = \eta_m - A_m e^{\frac{1}{kx^k}+\cdots+\frac{a_{k-1}}{x}} x^{-a_k}$$

folgt, dass, wenn ε eine beliebig kleine positive Grösse bedeutet,

$$\left|\frac{e^{-\frac{1}{x^{k+\varepsilon}}}P(x)}{x^{\varepsilon}\mathfrak{P}(x)}\right| < 1$$

ist, wenn $|x|$ hinreichend klein angenommen wird; dies ergiebt sich zunächst für Werthe von x im Sector $\mathfrak{S}_\delta$, sodann aber für die ganze Umgebung von $x=0$, da die Gültigkeitsbereiche der den Werthen $m=0$, $1, \dots, k-1$ entsprechenden Formeln (12.) diese ganze Umgebung ausfüllen. Es ist also für alle hinreichend kleinen Werthe von $|x|$:

$$\left|\frac{P(x)}{x^{\varepsilon}\mathfrak{P}(x)}\right| < \left|e^{\frac{1}{x^{k+\varepsilon}}}\right| \leqq e^{\frac{1}{|x|^{k+\varepsilon}}}.$$

Ferner sind**) beliebig kleine positive Grössen ϱ so vorhanden, dass für $|x|=\varrho$

$$\left|\Pi\left(\frac{1}{x}\right)\right| > e^{-\frac{1}{|x|^{k+\varepsilon}}}$$

ist. Nach (20.) ist also für $|x|=\varrho$

$$\left|e^{g\left(\frac{1}{x}\right)}\right| < e^{\frac{2}{|x|^{k+\varepsilon}}},$$

woraus hervorgeht***), dass $g\left(\frac{1}{x}\right)$ eine ganze rationale Function von $\frac{1}{x}$ höchstens $k$ten Grades ist.

Setzt man

$$G\left(\frac{1}{x}\right) = e^{g\left(\frac{1}{x}\right)}\Pi\left(\frac{1}{x}\right), \tag{21.}$$

so ist $G\left(\frac{1}{x}\right)$ eine ganze transcendente Function von $\frac{1}{x}$ vom Geschlecht k und man hat die Darstellung

$$P(x) = x^{\varepsilon}G\left(\frac{1}{x}\right)\mathfrak{P}(x). \tag{22.}$$

---

*) Wenn a_k eine ganze Zahl ist, gestattet Formel (18.) dieselben Schlüsse.

**) Hadamard, Liouv. Journ. 1893. S. 204.

***) Hadamard, a. a. O., S. 187.

Die drei Factoren von $P(x)$ ändern sich mit der unterhalb des Convergenzradius von $P(x)$ willkürlich zu wählenden positiven Grösse r.

Die in der Umgebung von $x=0$ eindeutige Function $P(x)$ hat die Form

$$P(x) = x^s G\left(\frac{1}{x}\right)\mathfrak{P}(x),$$

worin $\mathfrak{P}(x)$ eine für $|x|<r$ nicht verschwindende Potenzreihe, $G\left(\frac{1}{x}\right)$ eine ganze transcendente Function von $\frac{1}{x}$ vom Geschlecht k und s eine ganze Zahl darstellt.

Die Formen der Vielflache.

(Von Herrn *O. Hermes* in Steglitz.)

Hierzu Figurentafel I.

Steiner stellt in *Gergonnes* Annalen Bd. XIX, (*J. Steiner,* Gesammelte Werke, I, S. 227) die Aufgabe, zu der Flächenzahl eines Vielflachs die Beschaffenheit der Flächen selbst zu ermitteln, und wirft dann, nachdem er in einer kurzen Uebersicht die Anzahl der Dreiecke, Vierecke und Fünfecke, von denen ein Vierflach, Fünfflach, Sechsflach eingeschlossen sein kann, zusammengestellt hat, die Frage auf: *„Welches ist das allgemeine Gesetz?“*. Drei Jahre später (1832) erneuert er im Anhange zu seiner „Systematischen Entwickelung“ diese Frage in der enger gefassten Aufgabe 76 (Ges. W. I, S. 454): „Wenn man Polyeder nur in Hinsicht der Art oder Gattung ihrer Grenzflächen von einander unterscheidet, d. h. je nachdem diese Dreiecke, Vierecke, Fünfecke u. s. w. sind, so giebt es bekanntlich nur *einen* vierflächigen, *zwei* fünfflächige und *sieben* sechsflächige Körper. *Wieviel verschiedene* 7-, 8-, 9-, ... *n-flächige Körper sind in dieser Hinsicht möglich?*“

In dieser zweiten Form ist die *Steiner*sche Frage wiederholt aufgenommen*) und für einfache Fälle der Vielflache mit durchweg dreikantigen Ecken beantwortet worden, zuerst von *Kirkman* (Philos. Transact. 1856). In den Programmen des Köllnischen Gymnasiums zu Berlin von 1894 und 1896 (Berlin, *R. Gaertner*) habe ich Mittheilungen gemacht über „Anzahl und Form von Vielflachen“, bezüglich ein „Verzeichniss der einfachsten Vielflache“, d. h. der Vielflache mit dreikantigen Ecken, mit Einschluss der Zehnflache, geliefert.

Für ein solches Verzeichniss war eine formelle Darstellung dieser Vielflache durch *Flächenformeln* erforderlich. Diese Formeln werden in der gegenwärtigen Arbeit mit einer geringen Veränderung auch auf die Viel-

---

*) Vgl. „Geschichtliche Bemerkungen zur Aufzählung der Vielflache“ von Oberlehrer Dr. *M. Brückner*, Programm des Realgymnasiums zu Zwickau, 1897.

flache im allgemeinen, d. h. mit beliebig vielkantigen Ecken ausgedehnt. In einem übersichtlichen Verzeichniss der Vielflache von gleicher Flächenzahl zeigen sich nun die Flächenformeln als wesentlich verschieden bei veränderter Wahl der Grundfläche. Bezieht man die Vielflache auf jede ihrer Flächen als Grundfläche, so zeigt sich bei Vergleichung ihrer Darstellungen, sowohl bei übereinstimmender als bei verschiedener Flächenzahl, zwischen den Vielflachen mit beliebig vielkantigen Ecken und denen mit dreikantigen Ecken ein naher Zusammenhang, der leicht übersichtlich aus ihren *Kantenformeln* (§ 28) festzustellen ist und sich ohne weiteres verallgemeinern lässt, so dass in diesen Formeln gewissermassen eine Antwort auf die *Steiner*sche Frage in ihrer ersten Form enthalten ist.

Die vorliegenden Untersuchungen zerfallen in zwei Abschnitte, deren erster sich auf die Vielflache mit dreikantigen Ecken beschränkt, während in dem zweiten die Vielflache mit beliebig vielkantigen Ecken behandelt werden. Beide Abschnitte schliessen ein Verzeichniss der zugehörigen Vielflache f bis $f = 10$, bezüglich $f = 8$ ein. Die Figuren sind möglichst eingeschränkt worden. Eine Veröffentlichung des zweiten vervollständigten Verzeichnisses mit Hinzufügung der sämmtlichen zugehörigen Figuren bleibt vorbehalten.

A. Die einfachen Vielflache.

§ 1. Aus dem *Eulerschen Satze* über den Zusammenhang zwischen der Anzahl der Flächen f, der Ecken e und der Kanten k eines Vielflachs:

$$\text{(I.)} \qquad e+f = k+2$$

ergeben sich unmittelbar für *die einfachen Vielflache,* deren Ecken sämmtlich dreikantig sind, weil die dreifache Eckenzahl gleich der doppelten Kantenzahl ist, die Beziehungen:

$$\text{(II.)} \qquad 6(f-2) = 3e = 2k,$$

so dass, wenn der Werth eines der drei Elemente e, f, k eines einfachen Vielflachs gegeben ist, sich die Werthe der übrigen sofort bestimmen lassen. Während aber in der den Vielflachen im allgemeinen zugehörigen Gleichung (I.) sich e und f mit einander vertauschen lassen, treten bei den einfachen Vielflachen durch die ihnen ausschliesslich zukommende Bedingung, dass in jeder Ecke drei Kanten zusammentreffen, e und f in einen gewissen Gegensatz. Die reciprok-polaren Beziehungen zu (II.), bei denen

Ecken und Flächen einander wechselseitig ersetzen, sind, wenn e, f und k bezüglich durch f_1, e_1 und k_1 ersetzt werden:

$$6(e_1-2)=3f_1=2k_1, \quad \text{(III.)}$$

und gelten nur für Vielflache, die durchweg von Dreiecken eingeschlossen sind.

Die Vielflache mit dreikantigen Ecken werden nach der Anzahl ihrer Flächen, die Vielflache mit dreikantigen Flächen nach der Anzahl ihrer Ecken eingetheilt. Die Eckenzahl der ersteren und die Flächenzahl der letzteren ist nothwendig gerade, die Kantenzahl bei beiden Arten von Vielflachen durch drei theilbar.

§ 2. Eintheilung der Vielflache. Die Flächen eines einfachen Vielflachs sind, mit Ausnahme der drei dem regelmässigen Vierflach, Sechsflach, Zwölfflach entsprechenden Körper, nicht gleichvielkantig. Es mögen von den Flächen die meistkantige oder eine beliebige von den meistkantigen als ***Grundfläche*** bezeichnet werden und die der Grundfläche benachbarten, d. h. mit ihr in einer Kante, ***Grundkante,*** zusammenstossenden Flächen als ***Seitenflächen,*** endlich die von der Grundfläche ganz getrennt liegenden, zum Theil mit derselben nur durch eine Kante, ***Seitenkante,*** zusammenhängenden Flächen als ***Deckflächen,*** die Kanten, mit Ausnahme der Grundkanten und Seitenkanten, als ***Deckkanten.*** Deckkanten oder (offene) Systeme von Deckkanten, welche zur Verbindung von einzelnen oder von gruppenweise vereinigten Deckflächen dienen, werden ***Zwischenkanten*** genannt.

Die Anzahl der Grundkanten ist gleich der Anzahl der Seitenkanten und der Seitenflächen. Durch die Anzahl der Grundkanten ist demnach, vermittelst der Gleichungen (II.), zugleich die Zahl der Deckflächen und der Deckkanten bestimmt.

In einem f-Flach gehören zu einem g-Eck als Grundfläche $(f-g-1)$ Deckflächen und $(3f-2g-6)$ Deckkanten.

Im besonderen entspricht in einem einfachen f-Flach einer

Grundfläche mit der Kantenzahl:	eine Anzahl der Deckflächen,	eine Anzahl der Deckkanten.
$f-1$	0,	$f-4$,
$f-2$	1,	$f-2$,
$f-3$	2,	f,
$f-4$	3,	$f+2$.

u. s. w.

Es lassen sich demnach die einfachen Vielflache, ausser nach der Anzahl ihrer Flächen, noch in Vielflache der nullten, ersten, zweiten, ... Ordnung unterscheiden, je nachdem sie keine, eine, zwei, ... Deckflächen enthalten, d. h. je nachdem ihre Grundfläche von $f-1$, $f-2$, $f-3$, ... Kanten eingeschlossen ist.

Bei der grossen Anzahl der Vielflache gleicher Ordnung können zur leichteren Uebersicht weitere Unterabtheilungen, nach der Art und Gruppirung ihrer Deckflächen, sowie nach der Anzahl und Vertheilung der an ihnen vorkommenden freien Deckkanten und Zwischenkanten gebildet werden. Allerdings wird sich alsdann nicht vermeiden lassen, dass ein und dasselbe Vielflach der Wahl seiner Grundfläche entsprechend, verschiedenen Unterabtheilungen zugehört. Bei den späteren Untersuchungen über die Vielflache im allgemeinen geschieht diese Wiederholung in der Darstellung desselben Vielflachs mit Absicht.

§ 3. Flächenformeln. Um die Form eines einfachen Vielflachs festzustellen, genügt es, in einer *Flächenformel* der Reihe nach durch die zugehörigen Kantenzahlen anzugeben die Grundfläche, die Gruppe der Seitenflächen und die der Deckflächen. Zur Trennung dieser Gruppen dient ein Semikolon. Für beide Gruppen wird möglichst derselbe Cyklus festgehalten und die eine an die andere so angeschlossen, dass die erste Deckfläche der letzten Seitenfläche unmittelbar benachbart ist. Bei Festhaltung dieser Maassnahmen wird nur in wenig Fällen eine erläuternde Bemerkung über den Uebergang von den Seitenflächen zu den Deckflächen erforderlich sein (§ 13). Sollten die Deckflächen in mehr als einem Cyklus auftreten, was übrigens zuerst bei den Elfflachen zur Geltung kommt, so lassen auch hier die einzelnen Cyklen sich durch trennende Semikolons von einander absondern.

Als Beispiel mag die Flächenformel des *einfachen Zwölfflachs (Pentagonaldodekaeders)* dienen:

$$(5;\ 5,\ 5,\ 5,\ 5,\ 5;\ 5,\ 5,\ 5,\ 5,\ 5;\ 5),$$

in welcher durch die erste 5 die Grundfläche, durch die letzte 5 die oberste (innerste) Deckfläche, durch die beiden Zwischengruppen der je fünf Fünfecke die Seitenflächen, bezüglich der erste Cyklus der Deckflächen bezeichnet werden.

Zwischenkanten werden in einer Flächenformel angedeutet durch horizontale Striche zwischen den durch sie verbundenen Deckflächen,

mit gleichzeitiger Angabe ihrer Anzahl, wenn diese > 1 ist: vgl. die ***Neunflache:***

$$(6;\ 4,\ 6,\ 4,\ 6,\ 4,\ 4;\ 5-3), \quad \text{Fig. } 10,$$
$$(6;\ 5,\ 6,\ 4,\ 5,\ 6,\ 4;\ 3\,\overline{\scriptstyle 3}\,3), \quad \text{Fig. } 11.$$

Die ***Flächenformel eines Vierflachs*** ist:

$$(3;\ 3,\ 3,\ 3), \quad \text{Fig. } 1,$$

die eines ***Fünfflachs,*** einer abgestumpften dreiseitigen Pyramide:

$$(4;\ 3,\ 4,\ 3,\ 4), \quad \text{Fig. } 2,$$

die eines ***Sechsflachs,*** das etwa aus einem Vierflach durch Abschneiden zweier Ecken hervorgeht:

$$(5;\ 4,\ 3,\ 5,\ 3,\ 4), \quad \text{Fig. } 3,$$

die eines ***Sechsflachs*** etwa einer abgestumpften vierseitigen Pyramide:

$$(4;\ 4,\ 4,\ 4,\ 4;\ 4), \quad \text{Fig. } 4.$$

Zu den ***Siebenflachen ohne Deckfläche*** gehören die Flächenformeln:

$$(6;\ 3,\ 4,\ 4,\ 4,\ 3,\ 6), \quad \text{Fig. } 5,$$
$$(6;\ 3,\ 4,\ 5,\ 3,\ 4,\ 5), \quad \text{Fig. } 6,$$
$$(6;\ 3,\ 5,\ 3,\ 5,\ 3,\ 5), \quad \text{Fig. } 7.$$

Bei einem Siebenflach mit einem Sechseck als Grundfläche, also mit sechs Seitenflächen, kann eine Deckfläche nicht vorkommen und ist die Anzahl der Deckkanten gleich drei (§ 2). Für diese aber sind die in den Figuren 5—7 durch stärkere Zeichnung hervorgehobenen Verbindungen die einzig möglichen. Zu einem Fünfeck als Grundfläche gehören, für $f = 7$, fünf Deckkanten, die entweder ein Fünfeck bilden (Fig. 8), oder ein Viereck mit einer freien Kante (Fig. 9), während ein Dreieck mit zwei freien Kanten, mögen dieselben einzeln oder zusammenhängend auftreten, nicht statthaft ist, weil dann für einzelne Seitenflächen die Kantenzahl fünf nicht mehr ausreichen würde.

$$(5;\ 4,\ 4,\ 4,\ 4,\ 4;\ 5), \quad \text{Fig. } 8,$$
$$(5;\ 4,\ 5,\ 3,\ 5,\ 4;\ 4), \quad \text{Fig. } 9.$$

Aus dem gleichen Grunde sind einfache Siebenflache mit vier- oder dreikantigen Grundflächen auszuschliessen. (Vgl. § 19).

§ 4. *Kantenfiguren.* Die Formen der über einer Grundfläche von

gegebener Kantenzahl zu errichtenden f-Flache hängen, wie sich aus den bisher behandelten Vielflachen ergiebt, ausschliesslich von der Anzahl, Art und Gruppirung ihrer Deckflächen und freien Kanten oder Zwischenkanten ab, so dass zur graphischen Feststellung dieser Formen die von den Deckkanten gebildeten Figuren, die in den Einzelfiguren 1—11 durch stärkere Striche hervorgehoben sind, ausreichen. Diese nur von den Deckkanten gebildeten *Kantenfiguren* zeichnen sich durch Uebersichtlichkeit aus und sind in den Figuren 12—25 für *die einfachen Achtflache* dargestellt, und zwar gelten 12—15 für die Achtflache auf einem Siebeneck als Grundfläche, also ohne Deckfläche, 16—22a für ein Sechseck als Grundfläche, d. i. mit einer Deckfläche, endlich 24 und 25 für ein Fünfeck als Grundfläche, d. i. mit zwei Deckflächen.

Die Figuren 12—15 bestehen je aus *vier freien Deckkanten* in allen möglichen Verbindungen, 16—22a aus *sechs Deckkanten,* die eine geschlossene Figur bilden, und zwar ein Sechseck (16), ein Fünfeck mit einer freien Kante (17), ein Viereck mit zwei freien Kanten, die einzeln oder verbunden auftreten (18—20), ein Dreieck mit drei freien Kanten, einzeln (21), zu 2 und 1 (22), zu 3 (23 und 22a). (Vgl. die Kantenfiguren 5—7, von denen die Verbindung 5 hier nicht zu verwerthen ist, weil das Achtflach alsdann ein Siebeneck als Seitenfläche haben würde (Fig. 13a)). In 24 und 25 endlich, gehörig zu einem Fünfeck als Grundfläche, werden durch die *acht Deckkanten* zwei geschlossene Figuren gebildet, ein Fünfeck und Viereck, bezüglich ein Fünfeck und Dreieck mit einer freien Kante. Die Figuren 22 und 22a gehören zu demselben Achtflach (vgl. § 7). Achtflache mit einem Viereck oder einem Dreieck als Grundfläche sind auszuschliessen, so lange die Bedingung festgehalten wird, dass die Grundfläche durch keine der übrigen Flächen an Kantenzahl übertroffen werden darf.

§ 5. Um aus einer Kantenfigur *das Netz des zugehörigen Vielflachs* herzustellen, hat man nur an jeden freien Endpunkt einer Kante ein Seitendreieck anzusetzen, an jede frei vortretende Deckkante ein Viereck, an jeden einspringenden Winkel zweier Deckkanten ein Fünfeck, an jedes durch auf einander folgende Deckkanten gebildete einspringende, offene System von drei, vier, ... Kanten bezüglich ein Sechseck, Siebeneck, ...

An diese Construction schliesst sich unmittelbar die Lösung der Aufgabe:

zu der gegebenen Kantenfigur eines Vielflachs die Flächenformel zu bestimmen.

Zeigt sich die Figur als eine durchweg freie Kantenverbindung, d. h. ohne geschlossene Theile, so dass dem Vielflach Deckflächen fehlen (vgl. Fig. 12—15), so ergiebt sich *die Reihe der Seitenflächen,* indem man, etwa von einem freien Endpunkte der Kantenfigur ausgehend, diesem freien Endpunkte ein Seitendreieck zuordnet und nunmehr der Reihe nach jeder frei vortretenden Kante ein Seitenviereck, jedem einspringenden Winkel ein Seitenfünfeck u. s. w. bis zur Rückkehr zum Ausgangspunkte.

Die *Kantenzahl der Grundfläche* ist gleich der Anzahl der so gewonnenen Seitenfiguren, oder auch von vornherein zu bestimmen als gleich der Gesammtzahl der freien Endpunkte, der einzeln hervortretenden Kanten, der einspringenden Winkel und concaven Systeme der Deckkanten, weil jedem dieser Elemente eine Grundkante zugehört. Ebenso ergiebt sich die *Eckenzahl der Grundfläche* als gleich der Anzahl der convexen Ecken der Kantenfigur, die der freien Kantenverbindungen und der Zwischenkantensysteme mit eingeschlossen, vermehrt um die doppelte Anzahl der freien Endpunkte der offenen Kantenverbindungen.

Die Flächenformeln zu den Kantenfiguren 12—25 der einfachen Achtflache sind:

a. Ohne Deckfläche.

12.	(7; 3, 4, 4, 4, 4, 3, 7).
13.	(7; 3, 4, 6, 3, 4, 4, 5).
14.	(7; 3, 4, 5, 4, 3, 5, 5).
15.	(7; 3, 5, 3, 5, 4, 3, 6).

b. Mit einer Deckfläche.

16.	(6; 4, 4, 4, 4, 4, 4; 6).
17.	(6; 4, 5, 3, 5, 4, 4; 5).
18.	(6; 5, 3, 6, 3, 5, 4; 4).
19.	(6; 3, 5, 5, 3, 5, 5; 4).
20.	(6; 4, 5, 4, 3, 6, 4; 4).
21.	(6; 3, 6, 3, 6, 3, 6; 3).
22.	(6; 6, 3, 4, 6, 3, 5; 3).
23.	(6; 5, 5, 3, 4, 6, 4; 3).
22a.	(6; 6, 3, 5, 3, 6, 4; 3).

c. Mit zwei Deckflächen.

24. (5; 5, 4, 4, 5, 4; 4, 5).

25. (5; 3, 5, 5, 5, 5; 5, 3).

§ 6. *Reductionsverfahren.* Ist umgekehrt aus der Flächenformel eines einfachen Vielflachs die zugehörige Kantenfigur abzuleiten, so zeigen sich als wesentlich von einander zu unterscheiden die beiden Fälle, ob in der Gruppe der Seitenflächen Dreiecke vorkommen oder nicht. Im zweiten Falle gehört zu jeder convexen Ecke der Kantenfigur eine Ecke der Grundfläche (Fig. 16 und 24), also umgekehrt zu jeder Grundkante eine Seitenfigur, so dass die Anzahl der Grundkanten mit der der Seitenflächen übereinstimmt. Nach den Erläuterungen in § 5 lässt sich jetzt aus der Reihe der Seitenflächen der Umfang der geschlossenen Kantenfigur leicht herstellen, und schliesslich sind in diesen noch die einzelnen Deckflächen einzuzeichnen, was bei wenig Deckflächen keine Schwierigkeit macht.

Der erste Fall aber lässt sich auf den zweiten zurückführen durch Beseitigung der ihm eigenthümlich zukommenden Seitendreiecke, die durch Erweiterung der einem jeden dieser Dreiecke benachbarten drei Figuren ermöglicht wird.

Man kann sich nämlich die Gruppe der Seitenflächen als eine cyklische Permutationsform vorstellen: alsdann hat jedes ihrer Dreiecke zu benachbarten Seitenflächen Figuren von höherer Seitenzahl als drei, — benachbarte Seitendreiecke kommen nur beim Vierflach vor, — und ebenso hat die dritte Nachbarfläche, die Grundfläche, mehr als drei Seiten. Erweitert man also die drei Nachbarflächen eines Seitendreiecks bis zu ihrer Durchschneidung in einer neuen Ecke, — der Fall, dass diese ins Unendliche rückt, kann ausgeschlossen werden, — so fällt das Dreieck fort und die drei Nachbarfiguren verlieren je eine Kante. Umgekehrt kann man jedes Seitendreieck fortlassen, wenn man die beiden ihm (cyklisch) benachbarten Seitenflächen und die Grundfläche je um eine Kante erniedrigt.

Bei einem derartigen Verfahren fällt in der Kantenfigur das Endglied einer freien Kantenverbindung fort und umgekehrt. Durch Wiederholung desselben lassen sich aus einer Flächenformel nach einander die sämmtlichen Seitendreiecke, sowohl die anfänglich bereits vorhandenen, als die infolge des Reductionsverfahrens neu hinzukommenden, zum Wegfall bringen und demnach alle freien Deckkanten oder offenen Kantensysteme aus der

Kantenfigur beseitigen, also wie behauptet war, der erste der oben erwähnten Fälle auf den zweiten zurückführen.

Es handle sich etwa um die Flächenformel:

(6; 6, 3, 4, 6, 3, 5; 3),

welche zu dem Achtflach (22.) gehört. Durch Beseitigung des ersten Seitendreiecks ergiebt sich das Siebenflach (7.):

(5; 5, 3, 6, 3, 5; 3),

durch Fortschaffung des neu eingeführten Dreiecks das Sechsflach (3.):

(4; 4, 5, 3, 5; 3),

endlich durch Beseitigung des noch vorhandenen Seitendreiecks das Fünfflach (2.):

(3; 4, 4, 4; 3).

Die diesem Fünfflach zugehörige Kantenfigur, ein Dreieck, wird durch Ansetzen einer freien Kante an einen Eckpunkt zur Kantenfigur des Sechsflachs (3.) und durch aufeinanderfolgendes Ansetzen zweier Kanten an einen anderen Eckpunkt zur Kantenfigur des Siebenflachs (7.) und zuletzt des Achtflachs (22.).

Oder es sei als die Flächenformel eines Zehnflachs gegeben:

26. (6; 6, 6, 3, 4, 6, 4; 5, 3, 5);

durch Wegschaffung des einzigen Seitendreiecks ergiebt sich die Flächenformel eines Neunflachs:

(5; 6, 5, 3, 6, 4; 5, 3, 5),

und wenn das nunmehr neu hinzugetretene Seitendreieck beseitigt wird:

(4; 6, 4, 5, 4; 5, 3, 5),

die Flächenformel des einfachen Achtflachs (17.). Die zugehörige Kantenfigur ist der vierkantigen Grundfläche entsprechend als Figur mit vier convexen Ecken sofort zu zeichnen, weil sie zwischen diesen Ecken den auf einander folgenden Seitenflächen, einem Sechseck, Viereck, Fünfeck, Viereck entsprechend ein einspringendes Dreikant, eine Seite, einen einspringenden Winkel, eine Seite enthält. In diese Kantenfigur sind die drei Deckflächen, die beiden Fünfecke, zwischen denen ein Dreieck liegt, leicht einzuzeichnen; und endlich, um nach einander die Kantenfiguren des vermittelnden Neunflachs und des Zehnflachs selbst zu erhalten, an den einen

freien Eckpunkt eines der Deckfünfecke zwei an einander liegende freie Deckkanten (Fig. 26).

Die zur Herstellung der gesuchten Kantenfiguren erforderlichen Zwischenfiguren des Neunflachs und Achtflachs entsprechen in ihren Flächenformeln (zufällig) nicht der Bedingung, dass weder eine Seiten- noch eine Deckfläche die Grundfläche an Kantenzahl übertreffen soll. Für ein Sechseck als Grundfläche entsprechen ihnen die Flächenformeln:

(6; 4, 5, 5, 5, 3, 5; 6, 3)

und

(6; 4, 5, 3, 5, 4, 4; 5).

Vgl. § 7.

§ 7. *Uebertragung auf andere Grundflächen.* Hat ein Vielflach mehr als eine meistkantige Fläche, wie das Achtflach (22.), bei dem drei Flächen sechskantig sind, so kann jede derselben für die Flächenformel als Grundfläche angenommen werden. Dabei kann entweder die Flächenformel ungeändert bleiben, wie bei den meisten in den §§ 3 und 5 betrachteten Vielflachen, oder es ergeben sich für ein und dasselbe Vielflach verschiedene Flächenformeln, wie für dasselbe Achtflach die Flächenformeln (22.) und (22a). Jedenfalls ist die Untersuchung, um welchen von beiden Fällen es sich handelt oder wieviel verschiedene Flächenformeln dasselbe Vielflach bei verschiedenen gleichvielkantigen Grundflächen gestattet, nicht zu umgehen, zumal weil weiterhin erforderlich wird, die Flächenformel eines Vielflachs für jede einzelne seiner Flächen als Grundfläche darzustellen (vgl. § 11).

Bei geringerer Flächenzahl lässt sich diese Uebertragung auf eine andere Grundfläche am einfachsten unter Vermittelung der Kantenfigur ausführen, weil sich aus dieser unmittelbar die Nachbarfiguren der neuen Grundfläche g_1, d. h. die Seitenflächen, für die neue Flächenformel in ihrer nunmehrigen Aufeinanderfolge und endlich auch die von g_1 getrennt liegenden Flächen als die neuen Deckflächen entnehmen lassen. Beispielsweise geht aus der Kantenfigur des Achtflachs 22 hervor, (Fig. 22), dass für das den beiden zusammenhängenden freien Kanten anliegende Seitensechseck als Grundfläche die Nachbarflächen die Gruppe

3, 4, 6, 3, 5, 6

bilden, also dieselbe Gruppe wie in der Flächenformel (22.), während für

das zweite Seitensechseck als Grundfläche die Nachbarflächen in der Gruppirung

$$3, 5, 3, 6, 4, 6$$

zu der neuen Flächenformel (22a) führen. Zugleich ergiebt sich aus der Symmetrie der Kantenfigur 22a, dass die zu ihren Seitensechsecken als Grundflächen gehörigen Flächenformeln übereinstimmen müssen.

Als zweites Beispiel mögen die verschiedenen Darstellungen des Zehnflachs (Fig. 26) dienen, dessen Flächenformel (26.) bereits in § 6 gegeben ist. Dieses Zehnflach hat ausser seiner sechskantigen Grundfläche noch die drei Sechsecke 6_a, 6_b, 6_c als Seitenflächen. Für die Grundfläche 6_a sind die Seitenflächen der Reihe nach: (5, 3, 5, 6_b, 6, 4) und die Deckflächen: (6_c, 4, 2), wird also die Flächenformel:

26a. $(6_a;\ 5,\ 3,\ 5,\ 6_b,\ 6,\ 4;\ 6_c,\ 4,\ 3)$ (Fig. 26a);

ebenso ergiebt sich für das Sechseck 6_b als Grundfläche die Flächenformel:

26b. $(6_b;\ 3,\ 4,\ 6_c,\ 5,\ 6_a,\ 6;\ 4,\ 5,\ 3)$ (Fig. 26b),

und bezogen auf 6_c als Grundfläche:

26c. $(6_c;\ 6_b,\ 5,\ 5,\ 4,\ 6,\ 4;\ 3-6_a,\ 3)$ (Fig. 26c).

Es giebt einfache Achtflache und Neunflache mit zwei, Zehnflache mit vier, Elfflache mit fünf, Zwölfflache mit sieben verschiedenen Flächenformeln. Andererseits erreicht die Anzahl der einem Vielflach zugehörigen Flächenformeln grossentheils nicht die ihrer meistkantigen Flächen.

§ 8. ***Die einfachen Vielflache ohne Deckfläche*** (F_0) werden, ausser von der Grundfläche, nur von Seitenflächen begrenzt. ***Ihre Kantenfiguren enthalten*** (§ 2) $(f-4)$ ***gerade Linien.*** Die Summe der eine Flächenformel bildenden Kantenzahlen ist doppelt so gross als die Anzahl der Kanten des f-Flachs, also gleich $6(f-2)$; zieht man hiervon die Anzahl der Grundkanten $(f-1)$ ab, so ergiebt sich ***die Summe der Kantenzahlen der Seitenflächen gleich*** $(5f-11)$.

Wenn man in einem Vielflach (F_0) nach dem Verfahren von § 6 fortgesetzt die Seitendreiecke beseitigt, so muss sich zuletzt ein Vierflach ergeben. Alle diese Dreiecke treten bei den Kantenfiguren von F_0 an den freien Endpunkten auf, und darum fällt in diesen Figuren bei der Beseitigung eines jeden einzelnen Dreiecks eine freie Endkante fort. Diese

ist eine Einzelkante, wenn die benachbarten Seitenflächen mehr als vier Kanten haben, d. h. wenn die in der Flächenformel benachbarten Kantenzahlen, — deren cyklische Anordnung vorausgesetzt, — grösser als vier sind. Sie schliesst eine Reihe von mindestens zwei Kanten, wenn eine der benachbarten Kantenzahlen gleich vier ist.

Die Folge (4, 3, 4) kann in der Gruppe der Kantenzahlen der Seitenflächen, ausser bei dem Fünfflach (§ 3), nicht vorkommen. Soll also bei fortgesetzter Beseitigung der freien Endkanten einer Kantenfigur, d. h. der Seitendreiecke des zugehörigen Vielflachs, die Kantenfigur sich auf einen Punkt reduciren, also sich zuletzt ein Vierflach ergeben, so *müssen in der Gruppe der Seitenflächen mindestens zwei Dreiecke ein Viereck zur Nachbarfläche haben.*

Die einfachen Vielflache F_0 lassen sich *nach der Anzahl der unter ihren Seitenflächen vorkommenden Dreiecke* eintheilen. Als die einfachsten ergeben sich alsdann diejenigen, welche nur zwei Seitendreiecke enthalten, die also nothwendig jedes von einem Viereck begleitet sind. Die Kantenfigur eines jeden dieser Vierflache $F_{0,2}$ stellt sich dar als fortlaufender Zug der Deckkanten, ohne Seitenäste (vgl. die Figuren 12—14), und unter diesen wieder als besonders einfach die Kantenfigur eines f-Flachs, das auf der einen Seite seiner Enddreiecke als Seitenfläche ein $(f-1)$-Eck, auf der anderen Seite eine Reihe von $(f-4)$ Vierecken enthält, dessen Flächenformel also ist:

$$27.\qquad \left(f-1;\ 3,\ \overbrace{4,\ 4,\ 4,\ \ldots,\ 4,\ 4,\ 4}^{f-4},\ 3,\ f-1\right) \quad \text{(vgl. Fig. 12).}$$

Wenn man sich allgemein die Gruppe der Seitenflächen eines Vielflachs $F_{0,2}$, die Seitenflächen je durch ihre Seitenzahlen ersetzt, als cyklisch geschlossene Form vorstellt, so dass ihre äussersten Elemente als benachbart gelten, so hat jede der beiden Zahlen 3 auf der einen oder anderen Seite, eine 4 neben sich. Ist eine solche 4 vereinzelt, so entspricht ihr auf der entgegengesetzten Seite ihrer benachbarten 3 eine 5, weil nach Beseitigung des Dreiecks sich die Nachbarelemente 4 und 5 auf 3 und 4, d. h. passende neue Schlusselemente der Kantenverbindung, reduciren, so dass also in der gegebenen Flächenformel die Folge (4, 3, 5) vorkommen muss, gleichgültig, nach welcher Richtung dieselbe gelesen wird. Wenn aber an die Zahl 4 sich eine zweite 4 anschliesst, so muss auf der anderen Seite von 3 die Zahl 5 durch 6 ersetzt werden, bei einer

dritten 4 durch 7 u. s. w., so dass die entsprechenden Folgen in den Flächenformeln sind:

4, 3, 5; 4, 4, 3, 6; 4, 4, 4, 3, 7; ....

Allgemein ergiebt sich:

I. ***Wenn in der Flächenformel eines Vielflachs $F_{0,2}$ mit zwei Seitendreiecken auf einer Seite eines dieser beiden Dreiecke sich ein einzelnes Viereck, zwei, drei, ..., h benachbarte Vierecke befinden, so ist die Nachbarfigur auf der anderen Seite des Dreiecks bezüglich ein Fünfeck, Sechseck, Siebeneck, ..., ein $(h+4)$-Eck, und umgekehrt.***

Durch dieses Gesetz ist die Zusammengehörigkeit der Endfiguren an der ungetheilten Kantenverbindung eines Vielflachs F_0 mit zwei Seitendreiecken geregelt. Im Anschluss daran ergiebt sich die entsprechende Beziehung der ***Zwischenfiguren.***

An das einzelne Viereck oder die Reihe von Vierecken kann sich jetzt als nächste Seitenfläche ein h-Eck anreihen, wo $h > 4$ ist. Die Annahme $h = 3$ ist auszuschliessen, weil alsdann die Reihe der Seitenflächen bereits geschlossen sein würde, also bei n Vierecken die Nachbarfigur auf der anderen Seite des ersten Dreiecks ein $(n+3)$-Eck sein müsste, anstatt eines $(n+4)$-Ecks. (Vergl. die Flächenformel (27.)). Ist aber $h > 4$, so gehören zu dem h-Eck als Zwischenfiguren auf der entgegengesetzten Seite $(h-5)$ Vierecke, also zu einem Sechseck, Siebeneck, Achteck, ... bezüglich ein, zwei, drei, ... Vierecke und in gleicher Weise für alle folgenden Seitenfiguren, deren Kantenzahl > 5 ist, sowie umgekehrt einem einzelnen Viereck, einer Reihe von zwei, drei, ... Vierecken auf der entgegengesetzten Seite bezüglich ein Sechseck, Siebeneck, Achteck, ... entspricht.

Die einzige Ausnahme unter den Zwischenfiguren macht das ***Fünfeck,*** dem auf der anderen Seite keine Figur zugehört. Zu erklären ist das daraus, dass ein Seitenfünfeck in der Kantenfigur durch einen einspringenden Winkel angedeutet ist (§ 5), so dass dasselbe im Ganzen nur zur Trennung benachbarter, mehr als vierkantiger, in der Kantenfigur durch einspringende offene Systeme dargestellter Seitenfiguren dient.

In den folgenden Beispielen hat man sich die Seitenflächen, mit Einschluss der Enddreiecke, um die mittlere Linie als cyklisch geordnet

vorzustellen:

28. $$\left(12;\ 3,\ \frac{6,\ 4,\ 7,\ 4}{4,\ 4,\ 6,\ 4,\ 4,\ 5},\ 3\right);$$

29. $$\left(16;\ 3,\ \frac{4,\ 6,\ 7,\ 5,\ 6}{5,\ 4,\ 5,\ 4,\ 4,\ 5,\ 5,\ 4,\ 4},\ 3\right);$$

30. $$\left(12;\ 3,\ \frac{4,\ 5,\ 4,\ 5,\ 4,\ 4,\ 4}{5,\ 6,\ 7,},\ 3\right);$$

31. $$\left(11;\ 3,\ \frac{5,\ 5,\ 5,\ 4,\ 4}{4,\ 5,\ 5,\ 6,},\ 3\right).$$

Aus jeder einzelnen Folge der Seitenflächen zwischen den beiden Enddreiecken lässt sich, auch ohne Vermittelung der Kantenfigur, die zugehörige Folge auf der anderen Seite der Mittellinien herstellen, entsprechend dem folgenden *Beziehungsgesetz der Zwischenfiguren:*

II. *In der Flächenformel eines Vielflachs $F_{0,2}$ mit zwei Seitendreiecken entsprechen einem h-Eck als Zwischenfigur in der Ergänzungsreihe der Seitenflächen $(h-5)$ auf einander folgende Vierecke, also einem Achteck, Siebeneck, Sechseck bezüglich drei, zwei Vierecke, ein einzelnes Viereck, einem Fünfeck keine Figur, und umgekehrt, einem einzelnen Viereck, zwei, drei, ..., n benachbarten Vierecken bezüglich ein Sechseck, Siebeneck, Achteck, ..., $(n+5)$-Eck.*

Der Unterschied der beiden Gesetze I und II in betreff der Anzahl der Vierecke als Seitenflächen tritt klar hervor. Bei den Zwischenfiguren (II.) dienen die Fünfecke zur Andeutung der unmittelbaren Nachbarschaft zweier Figuren mit Seitenzahlen > 4 auf der anderen Seite.

Die Summe der Kantenzahlen der Zwischenfiguren. Wenn man die Kantenzahl einer jeden Seitenfläche in einer Flächenformel um 3 vermindert, so erhält man die Anzahl der geraden Linien, durch welche die betreffende Seitenfläche in der Kantenfigur dargestellt ist. (§ 5). Liegen also n_1 und n_2 Zwischenfiguren auf der einen und der anderen Seite der beiden Enddreiecke und sind s_1 und s_2 die entsprechenden Summen der Kantenzahlen dieser Zwischenfiguren, so hat man, weil beide Gruppen von Zwischenfiguren derselben Kantenfigur zugehören:

$$1.\quad s_1 - 3n_1 = s_2 - 3n_2 = f - 4,$$

nämlich gleich der Anzahl der Linien, aus denen die Kantenfigur besteht (§ 2). Ausserdem ist die Gesammtsumme der Kantenzahlen der Zwischen-

figuren:

$$2.\quad s_1+s_2 = 5f-17$$

und die Gesammtanzahl derselben:

$$3.\quad n_1+n_2 = f-3.$$

Aus diesen von einander nicht unabhängigen Gleichungen lassen sich, wenn ausser der Flächenzahl f des Vielflachs eine der vier Grössen n_1, n_2, s_1, s_2 gegeben ist, die übrigen berechnen. Von Interesse sind noch die von der Flächenzahl unabhängigen Beziehungen:

$$5(n_1+n_2) = s_1+s_2-2,\quad s_1 = 4n_1+n_2-1 \quad \text{und} \quad s_2 = 4n_2+u_2-1,$$

welche (vergl. die Beispiele in den §§ 3 und 5), ebenso wie die vorhergehenden Gleichungen zur Erprobung der Flächenformel eines Vielflachs F_0 mit zwei Seitendreiecken dienen können.

§ 9. ***Die Vielflache $F_{0,3}$ mit drei Seitendreiecken.*** Wenn man die Kantenfiguren zweier Vielflache $F_{0,2}$ mit dem einen Endpunkt zusammenlegt, so dass die zugehörigen Enddreiecke fortfallen und die zusammentreffenden freien Endkanten keinen gestreckten Winkel bilden, so erhält man die Kantenfigur eines neuen Vielflachs $F_{0,2}$, deren Kantenzahl gleich ist der Summe der Kantenzahlen der gegebenen Kantenfiguren, während sich auf der einen Seite der resultirenden Kantenfigur zwei zusammenstossende Seitenflächen zu einer Seitenfläche vereinigen und zwar wird aus einem m-Eck und n-Eck ein $(m+n-3)$-Eck. Dabei bleibt der Satz bestehen, dass *auf jeder Seite der Kantenverbindung die Gesammtsumme der Kanten der Seitenflächen, vermindert um die dreifache Anzahl dieser Flächen, denselben Werth ergiebt, die Kantenzahl der Verbindung* (§ 8, Gl. 1). Das Gleiche tritt ein bei der Zusammenlegung der Kantenfiguren von drei Vielflachen $F_{0,2}$ zu einer dreiästigen Figur, der Kantenfigur eines Vielflachs $F_{0,3}$, und zwar *für jede der drei ununterbrochenen Reihen der Seitenflächen zwischen zwei Seitendreiecken.* Der Zusammenhang der Seitenfiguren selbst, d. h. ihrer Seitenzahlen, auf den entgegengesetzten Seiten eines jeden einzelnen Astes ist derselbe wie bei der Kantenverbindung eines Vielflachs $F_{0,2}$ (§ 8).

Beispielsweise seien die Kantenfiguren der drei Vielflache $F_{0,2}$:

1. $(5;\ 3,\ \overset{u}{\overline{4,\ 4}},\ 3,\ \overset{o}{\overline{5}}),$

2. $(6;\ 3,\ \overset{u}{\overline{6}},\ 3,\ \overset{o}{\overline{4,\ 4,\ 4}}),$

3. $(7;\ 3,\ \overset{u}{\overline{5,\ 4,\ 4}},\ 3,\ \overset{o}{\overline{6,\ 4}}),$

d. i. des Sechsflachs (Fig. 3), des Siebenflachs (Fig. 5) und des Achtflachs (Fig. 13), in deren Flächenformeln die ***unteren*** und ***oberen*** Seitenfiguren durch die Indices u und o unterschieden sind, mit den je dem zweiten Dreieck zugehörigen Endpunkten vereinigt, wodurch diese Dreiecke verloren gehen, und zwar mit auf einander folgenden unteren und oberen Seiten, wie durch die Richtung der Pfeile in Fig. 27 angedeutet ist, so entsteht am gemeinschaftlichen Eckpunkte durch Vereinigung

von 5_o in (1) mit 6_u in (2) ein Achteck,
von 4_o in (2) mit 5_u in (3) ein Sechseck,
von 4_o in (3) mit 4_u in (1) ein Fünfeck,

im ganzen die Kantenfigur des ***Dreizehnflachs*** mit drei Seitendreiecken:

$$(12;\ 3,\ \underline{8},\ 3,\ 4,\ 4,\ \underline{6},\ 4,\ 4,\ 3,\ 6,\ \underline{5},\ 4),$$

in welcher Formel die neuen, durch Vereinigung entstandenen Seitenfiguren unterstrichen sind. (Vergl. Fig. 27).

Sind $s_{i,k}$ und $n_{i,k}$ bezüglich die Kantensumme und die Anzahl der Seitenfiguren zwischen den Enddreiecken i und k und x_1, x_2, x_3 die Kantenzahlen der Aeste 1, 2, 3, so hat man (§ 8) die drei Gleichungen:

$$s_{2,3} - 3n_{2,3} = x_2 + x_3 = 22 - 15 = 7,$$
$$s_{3,1} - 3n_{3,1} = x_3 + x_1 = 15 - 9 = 6,$$
$$s_{1,2} - 3n_{1,2} = x_1 + x_2 = 8 - 3 = 5,$$

woraus:

$$x_1 = 2, \quad x_2 = 3, \quad x_3 = 4.$$

In gleicher Weise lassen sich aus der Flächenformel eines jeden Vielflachs $F_{0,3}$ die Kantenzahlen (Gliederzahlen) der einzelnen Aeste der zugehörigen Kantenverbindung bestimmen.

Die Ausdehnung dieser Untersuchung auf die Vielflache ohne Deckfläche mit mehr als drei Seitendreiecken würde hier zu weit führen.

§ 10. Bei den ***Vielflachen mit Deckflächen*** ist zunächst der Zusammenhang zwischen der Kantenanzahl der Grundfläche und der Anzahl der Deckflächen und der Deckkanten hervorzuheben (§ 2). Die grössere Mannigfaltigkeit ihrer Körperformen zeigt sich schon darin, dass obgleich bei gegebener Flächenzahl und Kantenzahl eines Vielflachs die Zahl der Deckkanten oder der Linien, aus denen die Kantenfigur besteht, bestimmt ist, die Fälle zu unterscheiden sind, ob die Deckflächen nur durch Zwischen-

kanten verbunden sind, oder ob sie Kanten gemeinschaftlich haben und wie viele, welche Kantenzahl den Deckflächen selbst und welche den freien Kantensystemen zukommt.

Für die Seitenflächen, soweit sie den freien Kantensystemen zugehören, gelten die in § 8 mitgetheilten Gesetze mit geringen Modificationen, ebenso für die Zwischenkantensysteme. Auch in den Flächenformeln der Vielflache mit Deckflächen wird durch ein Seitendreieck der Endpunkt einer freien Kante oder Kantenverbindung angedeutet. Von jedem solchen Dreieck aus kann die allmähliche Beseitigung einer solchen Verbindung durch Fortschaffen des jedesmaligen Enddreiecks erfolgen, bis zuletzt kein Dreieck mehr unter den Seitenfiguren vorkommt. Flächenformeln, deren Seitenflächen durchweg mehr als dreikantig sind, gehören zu Vielflachen, in denen die freien Kanten ganz fehlen, die also entweder nur eine einzige Deckfläche enthalten, oder deren Deckflächen durch Zwischenkanten oder durch gemeinschaftliche Kanten in Verbindung stehen. Die ihnen zugehörigen Kantenfiguren sind meist leicht zu zeichnen.

Das *Zehnflach:*

(7; 5, 4, 6, 3, 4, 6, 4; 4, 5)

hat zu Deckflächen ein Viereck und ein Fünfeck. Unter seinen Seitenflächen kommt ein Dreieck vor, benachbart einem Viereck, also dem Endpunkt einer Kantenverbindung zugehörig (die Figur ist leicht zu ergänzen): wird das Dreieck beseitigt, (vgl. § 6), so entsteht das *Neunflach:*

(6; 5, 4, 5, 3, 6, 4; 4, 5),

und durch Fortschaffen des neuen Dreiecks das *Achtflach:*

(5; 5, 4, 4, 5, 4; 4, 5),

gehörig zur Figur 24, dessen Kantenfigur durch seine beiden Deckflächen mit gemeinschaftlicher Kante gebildet wird. Bemerkt sei hier zugleich, dass *bei Beseitigung der Seitendreiecke die Deckflächen ungeändert bleiben,* weil die Seitendreiecke stets der Grundfläche anliegen. —

Das *Zwölfflach:*

(9; 4, 6, 4, 5, 3, 8, 3, 5, 4; 5—4),

dessen Deckflächen, ein Viereck und Fünfeck, durch eine Zwischenkante verbunden sind, hat zwei einzelne Seitendreiecke, durch deren allmähliche Beseitigung sich zuerst das *Elfflach:*

(8; 4, 6, 4, 4, 7, 3, 5, 4; 5—4),

oder:

$$(8;\ 4,\ 6,\ 4,\ 5,\ 3,\ 7,\ 4,\ 4;\ 5-4),$$

und dann das *Zehnflach:*

$$(7;\ 4,\ 6,\ 4,\ 4,\ 6,\ 4,\ 4;\ 5-4)$$

ergeben, dessen Kantenfigur sofort darzustellen ist. —

Das *Zwölfflach:*

$$(10;\ 3,\ 7,\ 3,\ 5,\ 3,\ 8,\ 4,\ 3,\ 5,\ 6;\ 3)$$

hat vier dreieckige Seitenflächen, von denen die erste, benachbart einem Sechseck und Siebeneck, einer Einzelkante zugehört. Wird dieses Dreieck fortgeschafft, so entsteht das *Elfflach:*

$$(9;\ 6,\ 3,\ 5,\ 3,\ 8,\ 4,\ 3,\ 5,\ 5;\ 3),$$

ferner durch Beseitigung des jedesmaligen ersten Seitendreiecks das *Zehnflach:*

$$(8;\ 5,\ 4,\ 3,\ 8,\ 4,\ 3,\ 5,\ 5;\ 3),$$

das *Neunflach:*

$$(7;\ 5,\ 3,\ 7,\ 4,\ 3,\ 5,\ 5;\ 3),$$

das *Achtflach* (Fig. 22.):

$$(6;\ 4,\ 6,\ 4,\ 3,\ 5,\ 5;\ 3),$$

das *Siebenflach:*

$$(5;\ 4,\ 6,\ 3,\ 4,\ 5;\ 3),$$

identisch mit dem Siebenflach (6) in der Normalform, das *Sechsflach* (vergl. Fig. 3):

$$(4;\ 4,\ 5,\ 3,\ 5;\ 3),$$

endlich das *Fünfflach:*

$$(3;\ 4,\ 4,\ 4;\ 3),$$

d. i. Fünfflach (2), für ein Dreieck als Grundfläche.

§ 11. Bei der Reduction der einfachen Vielflache mit freien Kanten, wie zuletzt in § 10, gelangt man zu Vielflachen, in deren Flächenformeln die Grundflächen minderkantig sind. Derartige Vielflache sind auch bei der Untersuchung über Vielflache mit mehrkantigen Ecken nicht zu umgehen. An einzelnen Beispielen wird das zur *Herstellung der Flächenformeln auch für Grundflächen von geringerer Kantenzahl* zur Anwendung kommende Verfahren sich am besten erläutern lassen.

1. Die ***Flächenformel des Achtflachs*** 13:

$$13.\quad (7;\ 3_f,\ 4_c,\ 6_a,\ 3_g,\ 4_d,\ 4_e,\ 5_b),$$

dessen Seitenflächen zu besserer Unterscheidung durch die Buchstaben $a-g$ bezeichnet sind.

Für das ***Sechseck*** 6_a ***als Grundfläche*** sind (vergl. § 8) auf der einen Seite der Deckfläche 3_f die Seitenflächen 3_g, 4_d, 4_e, 5_b, auf der anderen Seite 4_c und 7, so dass die Flächenformel wird:

$$13_a.\quad (6_a;\ 3_g,\ 4_d,\ 4_e,\ 5_b,\ 4_c,\ 7;\ 3_f).$$

Für das ***Fünfeck*** 5_b ***als Grundfläche*** treten als Deckflächen auf die beiden von 5_b getrennt liegenden Figuren 3_g und 4_d und als Seitenflächen auf der einen Seite 3_f, 4_c, 6_a, auf der anderen 4_e und 7, ergiebt sich also als Flächenformel (Fig. 13_a—13_g):

$$13_b.\quad (5_b;\ 3_f,\ 4_c,\ 6_a,\ 4_e,\ 7;\ 3_g,\ 4_d).$$

Ferner für die ***Vierecke*** 4_c, 4_d, 4_e ***als Grundflächen:***

$$13_c.\quad (4_c;\ 3_f,\ 5_b,\ 6_a,\ 7;\ 3_g,\ 4_d,\ 4_e);$$
$$13_d.\quad (4_d;\ 3_g,\ 6_a,\ 4_e,\ 7;\ 5_b,\ 3_f,\ 4_c);$$
$$13_e.\quad (4_e;\ 5_b,\ 7,\ 4_d,\ 6;\ 3_g-4_c,\ 3_f).$$

Endlich für die ***Grundflächen*** 3_f ***und*** 3_g:

$$13_f.\quad (3_f;\ 4_c,\ 5_b,\ 7;\ 4_e,\ 4_d,\ 3_g,\ 6_a).$$
$$13_g.\quad (3_g;\ 4_d,\ 6_a,\ 7;\ 4_c,\ 3_f,\ 5_b,\ 4_e).$$

Wesentlich erleichtert werden diese Darstellungen durch die Bezugnahme auf die Kantenfigur (Fig. 13, vergl. § 4).

2. Das ***Achtflach*** (22):

$$22.\quad (6;\ 6,\ 3_d,\ 4_c,\ 6_a,\ 3_e,\ 5_b;\ 3_f)$$

ist in seinen Normalformeln bereits in § 5 dargestellt. Weiter erhält man für dasselbe die folgenden Flächenformeln (Fig. 22_b—22_e):

$$22_b.\quad (5_b;\ 3_e,\ 6,\ 6,\ 3_f,\ 6_a;\ 4_c,\ 3_d);$$
$$22_c.\quad (4_c;\ 6,\ 3_d,\ 6,\ 6_a;\ 3_f,\ 5_b,\ 3_e);$$
$$22_d.\quad (3_d;\ 6,\ 6,\ 4_c;\ 6_a,\ 3_e,\ 5_b,\ 3_f);$$
$$22_e.\quad (3_e;\ 6_a,\ 6,\ 5_b;\ 3_f,\ 6,\ 3_d,\ 4_c).$$

Die Flächenformel 22_f, d. h. auf 3_f als Grundfläche, ist dieselbe wie 22_e.

3. Von dem ***Zehnflach*** (26, § 6):

$$26.\quad (6;\ 6_a,\ 6_b,\ 3_b,\ 4_g,\ 6_c,\ 4_f;\ 5_d,\ 3_i,\ 5_e).$$

sind drei weitere Normalformeln bereits in § 7 abgeleitet worden, für die

übrigen sechs Flächen mit geringerer Kantenzahl ergeben sich noch die Flächenformeln (Fig. 26_d—26_i):

26_d. $(5_d;\ 6_a,\ 3_i,\ 5_e,\ 6_c,\ 4_f;\ 6,\ 4_g,\ 6_b;\ 3_h)$;
26_e. $(5_e;\ 6_a,\ 3_i,\ 5_d,\ 6_c,\ 6_b;\ 4_f,\ 6,\ 3_h,\ 4_g)$;
26_f. $(4_f;\ 6_a,\ 5_d,\ 6_c,\ 6;\ 3_h,\ 4_g,\ 6_b,\ 5_e,\ 3_i)$,
26_g. $(4_g;\ 6_c,\ 6_b,\ 3_h,\ 6;\ 4_f,\ 5_d,\ 5_e,\ 6_a;\ 3_i)$;
26_h. $(3_h;\ 4_g,\ 6_b,\ 6;\ 6_c,\ 5_e,\ 6_a,\ 4_f;\ 5_d,\ 3_i)$;
26_i. $(3_i;\ 5_d,\ 5_e,\ 6_a;\ 6,\ 4_f,\ 6_c,\ 6_b;\ 4_g,\ 3_h)$.

§ 12. *Verzeichniss der einfachen Neunflache und Zehnflache.* Geordnet sind die Vielflache nach der Anzahl ihrer Deckflächen und der Anzahl der freien Kanten in ihren Kantenfiguren (vgl. § 2)*).

I. Die Neunflache.

a. Ohne Deckfläche.

1. (8; 3, 4, 4, 4, 4, 4, 3, 8).
2. (8; 3, 4, 4, 4, 5, 3, 4, 7).
3. (8; 3, 4, 4, 5, 4, 3, 5, 6).
4. (8; 3, 4, 4, 6, 3, 4, 4, 6).
5. (8; 3, 4, 6, 4, 3, 5, 4, 5).
6. (8; 3, 4, 5, 5, 3, 4, 5, 5).
7. (8; 3, 4, 4, 5, 3, 5, 3, 7).
8. (8; 3, 4, 6, 3, 5, 3, 5, 5).
9. (8; 3, 5, 4, 3, 7, 3, 4, 5).
10. (8; 3, 6, 3, 4, 5, 4, 3, 6).
11. (8; 3, 5, 4, 3, 6, 4, 3, 6).
12. (8; 3, 5, 3, 6, 3, 5, 3, 6).

b. Mit einer Deckfläche.

Ohne freie Kante.

13. (7; 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4; 7).

---

*) Die zugehörigen Kantenfiguren sind leicht zu ergänzen, theilweise auch aus dem anfänglich erwähnten Programm von 1896 zu entnehmen. Auch hat Ostern 1897 Herr Oberlehrer *M. Brückner,* dem ich die Mittheilung über zwei Versehen in dem Verzeichnisse der einfachen Vielflache von 1896 verdanke, im Programm des Real-Gymnasiums zu Zwickau seiner Abhandlung *„Geschichtliche Bemerkungen zur Aufzählung der Vielflache“* die vollständigen Figuren der einfachen Neunflache und Zehnflache beigefügt.

Eine freie Kante.

14. (7; 4, 4, 5, 3, 5, 4, 4; 6).

Zwei freie Kanten.

15. (7; 3, 5, 4, 4, 5, 3, 6; 5).
16. (7; 5, 3, 5, 5, 3, 5, 4; 5).
17. (7; 4, 5, 4, 3, 6, 4, 4; 5).

Drei freie Kanten.

18. (7; 5, 3, 6, 3, 6, 3, 5; 4).
19. (7; 5, 4, 3, 7, 3, 5, 4; 4).
20. (7; 6, 3, 4, 6, 3, 5, 4; 4).
21. (7; 3, 5, 5, 4, 3, 6, 5; 4).
22. (7; 4, 5, 4, 4, 3, 7, 4; 4).
23. (7; 4, 5, 5, 3, 4, 6, 4; 4).
24. (7; 4, 6, 3, 5, 3, 6, 4; 4).

Vier freie Kanten.

25. (7; 3, 6, 4, 3, 7, 3, 6; 3).
26. (7; 4, 3, 6, 6, 3, 4, 6; 3).
27. (7; 4, 3, 6, 5, 4, 3, 7; 3).
28. (7; 3, 6, 4, 4, 3, 7, 5; 3).
29. (7; 5, 5, 3, 4, 7, 3, 5; 3).
30. (7; 3, 6, 5, 3, 4, 6, 5; 3).
31. (7; 6, 3, 5, 3, 7, 3, 5; 3).

---

32. (7; 5, 4, 5, 3, 4, 7, 4; 3).
33. (7; 5, 6, 3, 4, 4, 6, 4; 3).
34. (7; 5, 5, 4, 3, 5, 6, 4; 3).

29_a. (7; 5, 5, 3, 5, 3, 7, 4; 3).
27_a. (7; 6, 3, 5, 4, 3, 7, 4; 3).
35. (7; 6, 3, 6, 3, 4, 6, 4; 3).

c. Mit zwei Deckflächen.

Ohne freie Kante.

36. (6; 5, 4, 4, 4, 5, 4; 4, 6).
37. (6; 4, 5, 4, 4, 5, 4; 5, 5).
38. (6; 4, 6, 4, 6, 4, 4; 5—3).
39. (6; 4, 6, 4, 4, 6, 4; 4—4).
40. (6; 5, 6, 4, 5, 6, 4; $3 \underset{3}{-} 3$).

Eine freie Kante.

41. (6; 5, 5, 3, 5, 5, 4; 4, 5).
42. (6; 5, 4, 5, 3, 6, 4; 4, 5).
42_a. (6; 5, 4, 4, 6, 3, 5; 4, 5).
43. (6; 4, 6, 3, 6, 4, 4; 6, 3).
44. (6; 4, 5, 6, 3, 5, 4; 6, 3).
45. (6; 4, 5, 5, 5, 3, 5; 6, 3).
46. (6; 6, 5, 3, 5, 6, 4; 3—4).

Zwei freie Kanten.

44_a. (6; 6, 3, 5, 6, 3, 5; 4, 4).
43_a. (6; 6, 3, 6, 3, 6, 4; 4, 4).
38_a. (6; 5, 6, 3, 4, 6, 4; 4, 4).
47. (6; 5, 3, 6, 6, 3, 5; 5, 3).
48. (6; 3, 5, 6, 3, 6, 5; 5, 3).
48_a. (6; 3, 5, 5, 6, 3, 6; 5, 3).
49. (6; 3, 4, 5, 5, 5, 6; 5, 3).
46_a. (6; 4, 5, 6, 4, 3, 6; 5, 3).

Drei freie Kanten.

40_a. (6; 4, 3, 5, 6, 5, 6; 4, 3).

d. Mit drei Deckflächen.

50. (5; 5, 4, 5, 5, 4; 5, 5, 4).

II. Die Zehnflache.

a. Ohne Deckfläche.

1. (9; 3, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 3, 9).
2. (9; 3, 4, 4, 4, 4, 5, 3, 4, 8).
3. (9; 3, 4, 4, 4, 5, 4, 3, 5, 7).
4. (9; 3, 4, 4, 4, 6, 3, 4, 4, 7).
5. (9; 3, 4, 4, 5, 4, 4, 3, 6, 6).
6. (9; 3, 4, 4, 5, 5, 3, 4, 5, 6).
7. (9; 3, 4, 6, 5, 3, 4, 5, 4, 5).
8. (9; 3, 4, 7, 4, 3, 5, 4, 4, 5).
9. (9; 3, 4, 6, 4, 4, 3, 6, 4, 5).
10. (9; 3, 4, 5, 5, 4, 3, 5, 5, 5).

Kantenfigur dreiästig.

11. (9; 3, 4, 4, 4, 5, 3, 5, 3, 8).
12. (9; 3, 4, 4, 6, 3, 5, 3, 5, 6).

Kantenfigur dreiästig.

13. (9; 3, 4, 5, 5, 3, 5, 3, 6, 5).
14. (9; 3, 4, 7, 3, 5, 3, 5, 4, 5).

---

15. (9; 3, 5, 4, 3, 8, 3, 4, 4, 5).
16. (9; 3, 5, 4, 3, 6, 4, 4, 3, 7).
17. (9; 3, 6, 3, 4, 7, 3, 4, 4, 5).
18. (9; 3, 6, 3, 4, 5, 4, 4, 3, 7).
19. (9; 3, 5, 4, 3, 6, 5, 3, 4, 6).
20. (9; 3, 5, 4, 3, 7, 4, 3, 5, 5).
21. (9; 3, 6, 3, 4, 5, 5, 3, 4, 6).
22. (9; 3, 6, 3, 4, 6, 4, 3, 5, 5).

---

23. (9; 3, 4, 5, 4, 3, 7, 3, 4, 6).
24. (9; 3, 4, 6, 3, 4, 6, 3, 4, 6).

Kantenfigur vierästig.

25. (9; 3, 6, 3, 6, 3, 4, 6, 3, 5).
26. (9; 3, 6, 3, 5, 4, 3, 7, 3, 5).
27. (9; 3, 5, 3, 5, 5, 3, 5, 3, 7).

b. Mit einer Deckfläche.

Ohne freie Kante.

28. (8; 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4; 8).

Eine freie Kante.

29. (8; 4, 4, 5, 3, 5, 4, 4, 4; 7).

Zwei freie Kanten.

30. (8; 4, 5, 3, 6, 3, 5, 4, 4; 6).
31. (8; 4, 5, 3, 5, 5, 3, 5, 4; 6).
32. (8; 3, 5, 4, 5, 3, 5, 4, 5; 6).
33. (8; 4, 4, 5, 4, 3, 6, 4, 4; 6).

Drei freie Kanten.

34. (8; 5, 3, 6, 3, 6, 3, 5, 4; 5).
35. (8; 3, 5, 5, 3, 5, 5, 3, 6; 5).

---

36. (8; 5, 4, 3, 7, 3, 5, 4, 4; 5).
37. (8; 5, 4, 3, 6, 5, 3, 5, 4; 5).
38. (8; 5, 4, 3, 6, 4, 5, 3, 5; 5).
39. (8; 3, 6, 4, 3, 6, 4, 4, 5; 5).

Drei freie Kanten.

40. (8; 4, 5, 4, 4, 3, 7, 4, 4; 5).
41. (8; 4, 5, 5, 3, 4, 6, 4, 4; 5).
42. (8; 4, 6, 3, 5, 3, 6, 4, 4; 5).

Vier freie Kanten (getrennt.)

43. (8; 3, 6, 3, 6, 3, 6, 3, 6; 4).
44. (8; 3, 5, 5, 4, 3, 7, 3, 6; 4).
45. (8; 5, 3, 6, 4, 3, 7, 3, 5; 4).
46. (8; 3, 6, 3, 6, 4, 3, 6, 5; 4).

---

47. (8; 5, 4, 3, 7, 4, 3, 6, 4; 4).
48. (8; 5, 4, 3, 6, 5, 4, 3, 6; 4).
49. (8; 5, 4, 3, 8, 3, 4, 5, 4; 4).
50. (8; 5, 4, 3, 6, 6, 3, 4, 5; 4).
51. (8; 6, 3, 4, 6, 4, 3, 6, 4; 4).

---

52. (8; 4, 5, 4, 4, 3, 8, 3, 5; 4).
53. (8; 3, 5, 5, 4, 4, 3, 7, 5; 4).
54. (8; 5, 3, 6, 4, 4, 3, 7, 4; 4).
55. (8; 4, 5, 5, 3, 4, 7, 3, 5; 4).
56. (8; 3, 5, 5, 5, 3, 4, 6, 5; 4).
57. (8; 5, 3, 6, 5, 3, 4, 6, 4; 4).
58. (8; 4, 6, 3, 5, 3, 7, 3, 5; 4).
59. (8; 3, 5, 6, 3, 5, 3, 6, 5; 4).

Vier freie Kanten (vereinigt).

60. (8; 4, 5, 4, 4, 4, 3, 8, 4; 4).
61. (8; 4, 5, 4, 5, 3, 4, 7, 4; 4).
62. (8; 4, 5, 6, 3, 4, 4, 6, 4; 4).
63. (8; 4, 5, 5, 4, 3, 5, 6, 4; 4).
64. (8; 4, 5, 5, 3, 5, 3, 7, 4; 4).
65. (8; 4, 6, 4, 3, 6, 3, 6, 4; 4).
66. (8; 4, 6, 3, 5, 4, 3, 7, 4; 4).

Fünf freie Kanten.

(3, 1, 1).

67. (8; 3, 6, 4, 4, 3, 8, 3, 6; 3).
68. (8; 3, 6, 5, 3, 4, 7, 3, 6; 3).
69. (8; 3, 7, 3, 5, 3, 7, 3, 6; 3).

Fünf freie Kanten.

(2, 2, 1).

70. (5; 3, 4, 6, 3, 6, 4, 3, 8; 3).
71. (8; 3, 4, 6, 3, 7, 3, 4, 7; 3).
72. (8; 4, 3, 7, 3, 7, 3, 4, 6; 3).

(3, 2).

73. (8; 3, 4, 5, 7, 3, 4, 4, 7; 3).
74. (8; 3, 4, 5, 5, 5, 3, 4, 8; 3).
75. (8; 3, 4, 5, 6, 4, 3, 5, 7; 3).
76. (8; 3, 4, 5, 6, 3, 5, 3, 8; 3).
77. (8; 4, 3, 6, 5, 4, 4, 3, 8; 3).
78. (8; 4, 3, 6, 7, 3, 4, 4, 6; 3).
79. (8; 4, 3, 6, 6, 4, 3, 5, 6; 3).
80. (8; 4, 3, 6, 5, 5, 3, 4, 7; 3).
81. (8; 4, 3, 6, 6, 3, 5, 3, 7; 3).

(4, 1).

82. (8; 3, 5, 8, 3, 4, 4, 4, 6; 3).
83. (8; 3, 5, 5, 4, 5, 3, 4, 8; 3).
84. (8; 3, 5, 7, 4, 3, 5, 4, 6; 3).
85. (8; 3, 5, 5, 6, 3, 4, 4, 7; 3).
86. (8; 3, 5, 6, 4, 4, 3, 6, 6; 3).
87. (8; 3, 5, 6, 5, 3, 4, 5, 6; 3).
88. (8; 3, 5, 5, 5, 4, 3, 5, 7; 3).

---

89. (8; 3, 5, 5, 5, 3, 5, 3, 8; 3).
90. (8; 3, 5, 7, 3, 5, 3, 5, 6; 3).
91. (8; 3, 5, 6, 4, 3, 6, 3, 7; 3).
92. (8; 3, 5, 6, 3, 6, 3, 4, 7; 3).
93. (8; 3, 5, 7, 3, 4, 5, 3, 7; 3).

76_a. (8; 3, 5, 6, 3, 5, 4, 3, 8; 3).

(5). (Vergl. I, 2—12.)

94. (8; 5, 4, 4, 5, 3, 4, 8, 4; 3).
95. (8; 5, 7, 3, 4, 4, 4, 6, 4; 3).
96. (8; 5, 4, 5, 4, 3, 5, 7, 4; 3).
97. (8; 5, 5, 4, 4, 3, 6, 6, 4; 3).
98. (8; 5, 4, 6, 3, 4, 4, 7, 4; 3).
99. (8; 5, 6, 4, 3, 5, 4, 6, 4; 3).
100. (8; 5, 5, 5, 3, 4, 5, 6, 4; 3).

---

(5).

83_a. (8; 5, 4, 5, 3, 5, 3, 8, 4; 3).
101. (8; 5, 6, 3, 5, 3, 5, 6, 4; 3).
77_a. (8; 6, 3, 5, 4, 4, 3, 8, 4; 3).
102. (8; 6, 3, 7, 3, 4, 4, 6, 4; 3).
103. (8; 6, 3, 6, 4, 3, 5, 6, 4; 3).
104. (8; 6, 3, 5, 5, 3, 4, 7, 4; 3).

---

105. (8; 6, 4, 3, 7, 3, 4, 6, 4; 3).
74_a. (8; 5, 5, 3, 5, 4, 3, 8, 4; 3).
106. (8; 7, 3, 4, 5, 4, 3, 7, 4; 3).
107. (8; 5, 5, 4, 3, 6, 3, 7, 4; 3).
108. (8; 6, 4, 3, 6, 4, 3, 7, 4; 3).
109. (8; 7, 3, 5, 4, 3, 6, 5, 4; 3).
110. (8; 7, 4, 3, 6, 3, 5, 5, 4; 3).

---

111. (8; 6, 3, 6, 3, 5, 3, 7, 4; 3).

c. Mit zwei Deckflächen.

Ohne freie Kante.

112. (7; 4, 5, 4, 4, 5, 4, 4; 6, 5).
113. (7; 5, 4, 4, 4, 4, 5, 4; 4, 7).
114. (7; 4, 6, 4, 4, 6, 4, 4; 5—4).
115. (7; 4, 4, 6, 4, 6, 4, 4; 6—3).
116. (7; 4, 5, 5, 4, 4, 7, 4; $4 \underset{2}{-} 4$).
117. (7; 4, 5, 5, 4, 7, 4, 4; $5 \underset{2}{-} 3$).
118. (7; 4, 5, 6, 4, 5, 6, 4; $4 \underset{3}{-} 3$).
119. (7; 5, 4, 6, 4, 5, 7, 4, $3 \underset{4}{-} 3$).
120. (7; 5, 5, 5, 4, 6, 6, 4; $3 \underset{4}{-} 3$)

Eine freie Kante.

121. (7; 4, 5, 5, 3, 5, 5, 4; 5, 5).
122. (7; 4, 5, 4, 5, 3, 6, 4; 5, 5).
123. (7; 4, 5, 5, 3, 6, 4, 4; 6, 4).
124. (7; 4, 5, 4, 6, 3, 5, 4; 6, 4).
125. (7; 4, 5, 4, 5, 5, 3, 5; 6, 4).
126. (7; 4, 4, 6, 3, 6, 4, 4; 7, 3).
127. (7; 4, 4, 5, 6, 3, 5, 4; 7, 3).
128. (7; 4, 4, 5, 5, 5, 3, 5; 7, 3).
129. (7; 3, 5, 4, 5, 5, 4, 5; 7, 3).

Eine freie Kante.

130. (7; 4, 6, 5, 3, 5, 6, 4; 4—4).
131. (7; 4, 6, 4, 5, 3, 7, 4; 4—4).
132. (7; 4, 6, 5, 3, 7, 4, 4; 5—3).
133. (7; 4, 6, 4, 7, 3, 5, 4; 5—3).
134. (7; 4, 6, 4, 6, 5, 3, 5; 5—3).
135. (7; 5, 6, 3, 5, 4, 7, 4; $3\overline{2}4$).
136. (7; 5, 5, 5, 3, 5, 7, 4; $3\overline{2}4$).
137. (7; 3, 6, 5, 4, 4, 7, 5; $3\overline{2}4$).
138. (7; 6, 3, 6, 4, 4, 7, 4; $3\overline{2}4$).
139. (7; 5, 7, 3, 5, 5, 6, 4; $3\overline{3}3$).
140. (7; 5, 6, 5, 3, 6, 6, 4; $3\overline{3}3$).
141. (7; 5, 6, 4, 6, 3, 7, 4; $3\overline{3}3$).

Zwei freie Kanten.

142. (7; 5, 5, 3, 6, 3, 6, 4; 4, 5).
143. (7; 6, 3, 5, 5, 3, 6, 4; 4, 5).
144. (7; 6, 3, 5, 4, 6, 3, 5; 4, 5).
145. (7; 5, 4, 5, 3, 7, 3, 5; 4, 5).
146. (7; 5, 5, 3, 5, 6, 3, 5; 4, 5).
147. (7; 3, 6, 4, 4, 6, 3, 6; 4, 5).

---

148. (7; 5, 5, 4, 3, 6, 5, 4; 4, 5).
149. (7; 5, 4, 5, 4, 3, 7, 4; 4, 5).
150. (7; 5, 4, 6, 3, 4, 6, 4; 4, 5).

149_a. (7; 5, 4, 4, 7, 3, 4, 5; 4, 5).

151. (7; 5, 4, 4, 6, 4, 3, 6; 4, 5).

---

152. (7; 4, 6, 3, 7, 3, 5, 4; 6, 3).
153. (7; 5, 3, 6, 6, 3, 5, 4; 6, 3).
154. (7; 5, 3, 6, 5, 5, 3, 5; 6, 3).
155. (7; 4, 5, 6, 3, 6, 3, 5; 6, 3).
156. (7; 4, 6, 3, 6, 5, 3, 5; 6, 3).
157. (7; 3, 5, 5, 5, 5, 3, 6; 6, 3).

---

158. (7; 4, 6, 4, 3, 7, 4, 4; 6, 3).
159. (7; 4, 5, 7, 3, 4, 5, 4; 6, 3).
160. (7; 4, 5, 6, 4, 3, 6, 4; 6, 3).
161. (7; 4, 5, 5, 6, 3, 4, 5; 6, 3).
162. (7; 4, 5, 5, 5, 4, 3, 6; 6, 3).

Zwei freie Kanten.

163. (7; 6, 5, 3, 6, 3, 7, 4; 3—4).
164. (7; 7, 3, 5, 5, 3, 7, 4; 3—4).
165. (7; 7, 3, 5, 4, 7, 3, 5; 3—4).
166. (7; 6, 5, 3, 5, 7, 3, 5; 3—4).
167. (7; 3, 7, 4, 4, 7, 3, 6; 3—4).

---

168. (7; 6, 5, 4, 3, 6, 6, 4; 3—4).
169. (7; 6, 4, 6, 3, 4, 7, 4; 3—4).
138_a. (7; 6, 4, 4, 7, 4, 3, 6; 3—4).

---

170. (7; 3, 6, 6, 3, 5, 7, 5; $3\bar{2}3$).
171. (7; 6, 3, 7, 3, 5, 7, 4; $3\bar{2}3$).
172. (7; 5, 6, 4, 3, 6, 7, 4; $3\bar{2}3$).
173. (7; 5, 7, 3, 4, 5, 7, 4; $3\bar{2}3$).
174. (7; 6, 4, 3, 7, 4, 7, 4; $3\bar{\bar{2}}3$).

Drei freie Kanten.

152_a. (7; 6, 3, 6, 3, 7, 3, 5; 4, 4).
175. (7; 6, 3, 7, 3, 4, 6, 4; 4, 4).
158_a. (7; 6, 3, 6, 4, 3, 7, 4; 4, 4).
159_a. (7; 6, 3, 5, 7, 3, 4, 5; 4, 4).
176. (7; 6, 3, 5, 6, 4, 3, 6; 4, 4).
133_a. (7; 5, 5, 3, 7, 4, 3, 6; 4, 4).

---

177. (7; 5, 7, 3, 4, 4, 6, 4; 4, 4).
178. (7; 5, 6, 4, 3, 5, 6, 4; 4, 4).
117_a. (7; 5, 5, 5, 3, 4, 7, 4; 4, 4).
132_a. (7; 5, 6, 3, 5, 3, 7, 4; 4, 4).

---

179. (7; 3, 6, 3, 6, 6, 3, 6; 5, 3).
180. (7; 5, 3, 7, 3, 7, 3, 5; 5, 3).
181. (7; 3, 5, 6, 3, 7, 3, 6; 5, 3).

164_a. (7; 5, 3, 7, 4, 3, 7, 4; 5, 3).
182. (7; 5, 3, 6, 6, 4, 3, 6; 5, 3).
183. (7; 5, 3, 6, 7, 3, 4, 5; 5, 3).
184. (7; 3, 4, 5, 5, 6, 3, 7; 5, 3).
185. (7; 3, 4, 6, 3, 6, 5, 6; 5, 3).

Drei freie Kanten.

163_a. (7; 4, 6, 3, 7, 4, 3, 6; 5, 3).
186. (7; 3, 4, 5, 6, 3, 6, 6; 5, 3).
187. (7; 3, 5, 6, 4, 3, 7, 5; 5, 3).
187_a. (7; 3, 5, 5, 7, 3, 4, 6; 5, 3).
188. (7; 3, 5, 5, 6, 4, 3, 7; 5, 3).

---

189. (7; 4, 5, 6, 4, 4, 3, 7; 5, 3).
190. (7; 3, 4, 4, 5, 5, 5, 7; 5, 3).
191. (7; 4, 5, 6, 5, 3, 4, 6; 5, 3).
192. (7; 5, 3, 4, 6, 5, 5, 5; 5, 3).
136_a. (7; 4, 5, 7, 4, 3, 5, 5; 5, 3).
135_a. (7; 4, 6, 5, 3, 4, 7, 4; 5, 3).
165_a. (7; 4, 7, 3, 5, 3, 7, 4; 5, 3).
166_a. (7; 4, 5, 7, 3, 5, 3, 6; 5, 3).
193. (7; 3, 5, 3, 6, 5, 5, 6; 5, 3).

---

194. (7; 7, 3, 7, 3, 4, 7, 4; 3—3).
171_a. (7; 7, 3, 5, 7, 4, 3, 6; 3—3).

---

195. (7; 6, 7, 3, 4, 4, 7, 4; 3—3).
196. (7; 6, 6, 4, 3, 5, 7, 4; 3—3).

Vier freie Kanten (getrennt).

194_a. (7; 3, 7, 3, 7, 4, 3, 7; 4, 3).
174_a. (7; 7, 3, 4, 7, 4, 3, 6; 4, 3).
197. (7; 4, 3, 7, 7, 3, 4, 6; 4, 3).
174_b. (7; 4, 3, 7, 6, 4, 3, 7; 4, 3).

195_a. (7; 6, 3, 7, 4, 4, 3, 7; 4, 3).
198. (7; 6, 3, 7, 5, 3, 4, 6; 4, 3).
173_a. (7; 7, 4, 3, 5, 7, 3, 5; 4, 3).
141_a. (7; 3, 6, 6, 5, 3, 4, 7; 4, 3).
172_a. (7; 3, 6, 7, 4, 3, 5, 6; 4, 3).
171_b. (7; 3, 6, 7, 3, 5, 3, 7; 4, 3).

Vier freie Kanten (vereinigt).

199. (7; 6, 6, 3, 4, 4, 7, 4; 4, 3).
200. (7; 5, 6, 6, 3, 4, 4, 6; 4, 3).

Vier freie Kanten (vereinigt).

201. (7; 5, 7, 4, 4, 3, 6, 5; 4, 3).
119_a. (7; 5, 6, 4, 5, 3, 4, 7; 4, 3).
201_a. (7; 6, 5, 4, 3, 5, 7, 4; 4, 3).
202. (7; 5, 7, 5, 3, 4, 5, 5; 4, 3).
203. (7; 5, 6, 5, 4, 3, 5, 6; 4, 3).

139_a. (7; 5, 6, 5, 3, 5, 3, 7; 4, 3).
195_b. (7; 7, 3, 6, 3, 4, 7, 4; 4, 3).
196_a. (7; 5, 7, 4, 3, 6, 3, 6; 4, 3).
198_a. (7; 5, 7, 3, 6, 3, 4, 6; 4, 3).
173_b. (7; 5, 7, 3, 5, 4, 3, 7; 4, 3).

d. Mit drei Deckflächen.

Drei gemeinschaftliche Kanten.

Ohne freie Kante.

204. (6; 5, 4, 5, 4, 5, 4; 5, 5, 5).
205. (6; 4, 5, 4, 5, 5, 4; 6, 5, 4).
206. (6; 4, 6, 4, 4, 5, 4; 6, 3, 6).

Eine freie Kante.

207. (6; 5, 5, 3, 6, 5, 4; 5, 5, 4).
208. (6; 4, 6, 3, 6, 4, 5; 5, 5, 4).
209. (6; 3, 6, 4, 5, 5, 5; 5, 5, 4).

---

210. (6; 3, 5, 5, 5, 5, 5; 6, 4, 4).
211. (6; 5, 3, 6, 5, 5, 4; 6, 4, 4).
206_a. (6; 4, 6, 3, 6, 5, 4; 6, 4, 4).

---

212. (6; 6, 5, 3, 5, 5, 4; 5, 3, 6).
213. (6; 6, 4, 5, 3, 6, 4; 5, 3, 6).
214. (6; 6, 4, 4, 6, 3, 5; 5, 3, 6).

Zwei freie Kanten.

215. (6; 6, 3, 6, 6, 3, 5; 5, 4, 4).
216. (6; 3, 6, 5, 6, 3, 6; 5, 4, 4).
217. (6; 3, 4, 6, 5, 5, 6; 5, 4, 4).

---

218. (6; 3, 5, 6, 6, 3, 6; 6, 3, 4).
219. (6; 3, 4, 5, 6, 5, 6; 6, 3, 4).

Zwei freie Kanten.

220. (6; 4, 3, 6, 6, 5, 5; 6, 3, 4).
221. (6; 4, 6, 6, 4, 3, 6; 6, 3, 4).

---

222. (6; 6, 6, 3, 4, 6, 4; 5, 3, 5).

Drei freie Kanten.

223. (6; 6, 6, 5, 3, 4, 6; 5, 3, 4).

Zwei gemeinschaftliche Kanten.

Ohne freie Kante.

224. (6; 4, 6, 4, 4, 6, 4; 5, 4, 5).
225. (6; 4, 5, 5, 4, 6, 4; 5, 5, 4).
226. (6; 6, 4, 4, 4, 6, 4; 4, 4, 6).
227. (6; 5, 5, 4, 5, 5, 4; 4, 6, 4).
224_a. (6; 5, 4, 5, 4, 6, 4; 4, 6, 4).

---

228. (6; 4, 5, 5, 6, 4, 4; 6, 5, 3).
210_a. (6; 4, 5, 5, 5, 5, 4; 5, 6, 3).
211_a. (6; 4, 5, 4, 5, 6, 4; 5, 6, 3).

217_a. (6; 5, 6, 4, 6, 5, 4; 4, 5—3).
229. (6; 4, 6, 5, 5, 6, 4; 4–5, 3).
222_a. (6; 6, 4, 5, 5, 6, 4; 3–6, 3).
221_a. (6; 6, 6, 4, 6, 6, 4; 3–4–3).
223_a. (6; 5, 6, 5, 6, 6, 4; 3–4, 3).

Eine freie Kante.

228_a. (6; 6, 5, 3, 5, 6, 4; 4, 4, 5).
206_b. (6; 6, 3, 6, 4, 6, 4; 4, 5, 4).
211_b. (6; 5, 6, 3, 5, 6, 4; 4, 5, 4).

212_a. (6; 5, 5, 5, 6, 3, 5; 4, 6, 3).
215_a. (6; 5, 5, 6, 3, 6, 4; 4, 6, 3).
216_a. (6; 5, 6, 3, 6, 5, 4; 4, 6, 3).
213_a. (6; 3, 6, 4, 5, 6, 5; 4, 6, 3).
214_a. (6; 6, 3, 5, 5, 6, 4; 4, 6, 3).
215_b. (6; 5, 5, 3, 6, 6, 4; 4, 6, 3).
222_b. (6; 4, 6, 6, 5, 3, 5; 6, 4, 3).

Eine freie Kante.

230. (6; 3, 5, 5, 5, 6, 5; 5, 5, 3).
212_b. (6; 5, 3, 6, 5, 6, 4; 5, 5, 3).
215_c. (6; 4, 6, 3, 6, 6, 4; 5, 5, 3).

218_a. (6; 6, 6, 3, 6, 6, 4; 3—5, 3).

Zwei freie Kanten.

231. (6; 6, 6, 3, 6, 3, 6; 3, 6, 3).
218_b. (6; 6, 6, 4, 3, 6, 5; 3, 6, 3).
232. (6; 6, 3, 6, 6, 3, 6; 3, 6, 3).
231_a. (6; 3, 6, 6, 3, 6, 6; 3, 6, 3).

222_c. (6; 3, 4, 6, 5, 6, 6; 4, 5, 3).
220_a. (6; 3, 4, 5, 6, 6, 6; 5, 4, 3).

e. Mit vier Deckflächen.

233. (5; 5, 5, 5, 5, 4; 5, 5, 4, 5).

§ 13. *Schlussbemerkungen.* Die *beiden Zehnflache* 231_a. *und* 232. stimmen sowohl in der Folge ihrer Seitenflächen als in den Deckflächen überein, sind aber trotzdem ganz verschieden. Zur Erklärung dieser Erscheinung, die sich bei den Vielflachen von grösserer Flächenzahl mehrfach wiederholt, dient die Reduktion ihrer Flächenformeln. Durch Beseitigung der beiden Seitendreiecke ergiebt sich für beide Zehnflache die vereinfachte Flächenformel desselben Achtflachs, nämlich:

(4; 5, 5, 5, 5; 3, 6, 3),

zu welcher als Kantenfigur ein Achteck mit abwechselnden concaven und convexen Winkeln gehört, von dem durch Diagonalen von zwei Gegenecken Dreiecke abgeschnitten werden. Aus ihr ergeben sich die beiden den Flächenformeln 231_a. und 232. zugleich zugehörigen Kantenfiguren, wenn freie Einzelkanten durch die Spitzen der Dreiecke oder des Sechsecks gezogen werden (Fig. 28, a, b). Erst durch die in § 3 festgestellte Bedingung, dass sich die erste Deckfläche an die letzte Seitenfläche als benachbart anschliessen soll, sind für die beiden Zehnflache besondere, sich von einander unterscheidende Flächenformeln zu gewinnen. Die Entscheidung darüber, welches von beiden

Vielflachen die zweite Ansicht des Zehnflachs 231. bildet, ergiebt sich nunmehr aus ihren Flächenformeln für eine sechseckige Seitenfläche als Grundfläche (§ 7); dieselben sind bezüglich:

(6; 6, 6, 3, 6, 3, 6; 3, 6, 3)

und

(6; 6, 3, 6, 6, 3, 6; 3, 6, 3).

Die erste ist die Flächenformel 231., die zweite wiederum die des Zehnflachs 232., so dass in der That 231_α. die gesuchte andere Ansicht des Zehnflachs 231. ist.

Die *Anzahl der einfachen Vielflache* wird mit zunehmender Flächenzahl sehr gross. Es haben sich, eine nochmalige Durchsicht vorbehalten, ergeben:

Für die *Elfflache:*

a.	Ohne Deckfläche	82	Formen.
b.	Mit einer Deckfläche	279	-
c.	Mit zwei Deckflächen	510	-
d.	Mit drei Deckflächen	336	-
e.	Mit vier Deckflächen	43	-
		1250	Formen.

Für die *Zwölfflache:*

a.	Ohne Deckfläche	228	Formen.
b.	Mit einer Deckfläche	986	-
c.	Mit zwei Deckflächen	2237	-
d.	Mit drei Deckflächen	2806	-
e.	Mit vier Deckflächen	1205	-
f.	Mit fünf Deckflächen	70	-
g.	Mit sechs Deckflächen	1	-
		7533	Formen.

Zur *Poisson*schen Theorie der Elektrostatik, insbesondere über die elektrische Vertheilung auf einem von drei Kugelflächen begrenzten Conductor.

(Von Herrn ***Ernst Neumann*** in Halle.)

Die vorliegende Arbeit ist angeregt durch eine von Professor ***Carl Neumann*** in Leipzig im Wintersemester 1895/96 gehaltene Vorlesung über Elektrostatik und das im Anschluss an dieselbe abgehaltene mathematische Seminar.

Ueber den allgemeinen Gedankengang und über die hauptsächlichsten Resultate der Arbeit giebt ein kurzer Auszug Auskunft, der bereits vor nunmehr zwei Jahren der Königl. Sächs. Gesellschaft der Wissenschaften vorgelegt und in deren Berichten für 1896 abgedruckt ist. — Hier will ich über den Inhalt nur noch kurz das Folgende bemerken.

Die Arbeit behandelt vor allem specielle elektrostatische Probleme, doch werden zum Schlusse auch einige, zunächst in speciellen Fällen gefundene Resultate verallgemeinert.

Bei Behandlung der speciellen Probleme bediene ich mich fast ausschliesslich der dipolaren Coordinaten. — Um nun den Gang der Darstellung nicht durch längere rein geometrische Betrachtungen unterbrechen zu müssen, habe ich alle auf diese dipolaren Coordinaten bezüglichen Sätze, von denen ich Gebrauch mache, in einem besonderen Abschnitte zusammengestellt und der eigentlich elektrostatischen Arbeit vorangeschickt. Dabei bin ich freilich über das zum Verständniss der weiteren Arbeit wirklich Nothwendige hier und da hinausgegangen, weil ich glaubte, dass einige Resultate dieses ersten Abschnittes auch an und für sich einiges Interesse beanspruchen dürften, so vor allem die in dipolaren Coordinaten entwickelten Formeln für die Abbildung nach reciproken Radien.

Erst im zweiten Abschnitte werden wir uns dann dem eigentlichen Thema der Arbeit, nämlich elektrostatischen Problemen zuwenden.

Die sämmtlichen die Vertheilung der statischen Elektricität auf Conductoren betreffenden Aufgaben lassen sich auf *zwei Fundamentalprobleme* zurückführen; diese beziehen sich *erstens* auf die Vertheilung auf isolirten Conductoren, wenn keine äusseren Kräfte einwirken, und *zweitens* auf die Vertheilung der auf zur Erde abgeleiteten Conductoren durch einen äusseren Massenpunkt inducirten Elektricität.

Die Methode der reciproken Radien gestattet nun die Lösung des *zweiten Fundamentalproblems* für einen Conductor zurückzuführen auf die Lösung des *ersten Problems für einen anderen Conductor.* Diese Reduction gestaltet sich nun überaus einfach bei Zugrundelegung dipolarer Coordinaten, wie wir weiterhin mehrfach von ihr Gebrauch machen werden. So erledigt sich z. B., wie wir in § 3 des zweiten Abschnittes zeigen, nach dieser Methode der reciproken Radien unter gleichzeitiger Anwendung dipolarer Coordinaten sehr leicht das (schon von *C. Neumann* behandelte) zweite Fundamentalproblem für zwei Kugeln.

Ausgehend von den hier abgeleiteten Resultaten, beweisen wir sodann in § 4 für ein specielles im Gleichgewichtszustande befindliches elektrisches Massensystem das Vorhandensein einer eigenthümlichen *einfachen Niveaufläche.* —

Für einen Conductor, der begrenzt gedacht ist von einer Niveaufläche irgend eines gegebenen Massensystems, lässt sich nun nach bekannten Principien leicht die elektrische Gleichgewichtsvertheilung ermitteln. Hiervon machen wir in § 5 die Anwendung auf jene oben gefundene Niveaufläche. Wir gelangen auf diese Weise zur Lösung des ersten elektrostatischen Fundamentalproblems für einen gewissen *Conductor K, der begrenzt wird von Theilen dreier Kugelflächen, deren eine die beiden anderen orthogonal schneidet.* Dabei sei noch besonders hervorgehoben, dass dieser Conductor im allgemeinen kein Rotationskörper ist.

In den folgenden Paragraphen geben wir zunächst für diesen Conductor K auch noch die Lösung des zweiten elektrostatischen Fundamentalproblems an und bestimmen im Anschluss daran für eine Reihe weiterer Körper, die *Green*sche Function, welche das Problem des stationären Temperaturzustandes vermittelt. — Speciell für die *Halbkugelschale* berechnen wir diese *Green*sche Function auf zwei wesentlich verschiedenen

Wegen und controlliren somit alle bisherigen Darlegungen auf ihre Richtigkeit hin.

Damit verlassen wir vorläufig die speciellen Probleme und wenden uns mit § 10 wieder allgemeineren Betrachtungen zu. Wir bringen daselbst den Beweis, dass ähnlich einfache Niveauflächen, wie wir sie in § 4 bei einem speciellen System fanden, einer ganzen Klasse von Conductorensystemen eigen sind.

Es dürfte sich der so gewonnene allgemeine Satz nun wieder von einigem Nutzen erweisen bei Behandlung specieller Probleme; denn es versteht sich von selbst, dass wir ausgehend von solchen einfachen Niveauflächen vielfach zur Lösung elektrostatischer Probleme für die von ihnen begrenzt gedachten Conductoren gelangen werden. — Ein einfaches Beispiel dieser Art behandeln wir in § 11. Wir bringen daselbst die Lösung des ersten elektrostatischen Fundamentalproblems für einen eigenthümlichen Conductor und berechnen sodann mit Hülfe dieser Lösung die *Green*sche *Function für den Kugelsector,* lösen damit also für den Kugelsector das Problem des stationären Temperaturzustandes.

Erster Abschnitt.

Zur Theorie der dipolaren Coordinaten.

§ 1. Einführung der dipolaren Coordinaten. Erinnerung an bekannte Formeln.

A.) Die dipolaren Coordinaten der Ebene.

Wie es zur völligen Bestimmung des bekannten *Cartes*ischen rechtwinkligen Coordinatensystems in der Ebene genügt, Lage und Richtung der beiden Coordinatenaxen anzugeben, so ist das ebene *dipolare Coordinatensystem* eindeutig bestimmt, sobald man die gegenseitige Lage zweier Punkte, der beiden Pole A_1 und A_2 des Systems, kennt. Die Länge $2a$ ihrer Verbindungslinie, der sogenannten *Pollinie,* ist die einzige dem System charakteristische Constante.

Die durch die Pole A_1 und A_2 hindurchgehende Gerade heisst die *Axe* des dipolaren Coordinatensystems. Die Pollinie ist sonach der von den beiden Polen begrenzte Theil der Axe. Als *Complement der Pollinie* wollen wir demgemäss den ausserhalb der Pole gelegenen Theil der Axe

bezeichnen, der also aus zwei getrennten, ins Unendliche laufenden Theilen einer Geraden besteht.

Einen beliebig in der Ebene gegebenen Punkt ξ bestimmen wir nun in diesem Coordinatensystem durch das Verhältniss seiner Entfernungen ϱ_1 und ϱ_2 von den Polen A_1 und A_2 und durch den Winkel ϑ, den diese Entfernungen ϱ_1 und ϱ_2 mit einander bilden. — Es empfiehlt sich jenes Verhältniss $\frac{\varrho_1}{\varrho_2}$ der Polabstände gleich $e^{-\lambda}$ zu setzen, anstatt des Verhältnisses selber also die Grösse

$$(1.)\qquad \lambda = -\log\frac{\varrho_1}{\varrho_2}$$

einzuführen, und diese und den Winkel ϑ als Bestimmungsstücke, als Coordinaten des Punktes ξ zu gebrauchen. Es sind dies die ***dipolaren Coordinaten*** jenes Punktes ξ.

Sucht man nun die Punkte auf, welche die nämliche λ-Coordinate besitzen, wie ξ, so zeigt sich, dass dieselben sämmtlich auf einem Kreise liegen, die Curven $\lambda = \text{const.}$ sind also Kreise; wir wollen sie kurz als ***λ-Kreise*** bezeichnen. Sie werden den Pol A_1 oder aber den Pol A_2 umschliessen, je nachdem ihr Parameter λ positiv oder negativ ist. Die Curve $\lambda = 0$ speciell ist die mittelsenkrechte Gerade der beiden Pole; sie möge die ***Symmetriegerade*** des dipolaren Systems heissen. — Die Curven $\vartheta = \text{const.}$ sodann sind Kreisbogen, welche sämmtlich die beiden Pole A_1 und A_2 verbinden und die sämmtlichen λ-Kreise orthogonal durchschneiden. Wir wollen diese Bogen hinfort kurz ***ϑ-Bogen*** nennen.

Je zwei solche ϑ-Bogen werden sich stets zu einem Kreise ergänzen. Wir wollen sie als ***complementäre ϑ-Bogen*** bezeichnen.

An die Betrachtung der ϑ-Bogen knüpft nun eine zweite Definition der ϑ-Coordinate eines Punktes ξ an, nämlich als Winkel, welchen der (2.) durch ξ gehende ϑ-Bogen in einem der Pole mit dem Complement der Pollinie bildet. Wir rechnen dabei diesen Winkel ϑ in einem bestimmten Sinne fortlaufend von 0 bis 2π und erreichen somit erst durch diese zweite Definition eine völlig eindeutige Bestimmung der ϑ-Bogen und damit überhaupt der dipolaren Coordinaten.

B.) Die dipolaren Coordinaten im Raume.

Um nun von den ebenen dipolaren Coordinaten zu den dipolaren Coordinaten im Raume überzugehen, lassen wir die von der Axe des

Systemes begrenzte Halbebene mit den in ihr enthaltenen λ-Kreisen und ϑ-Bogen um jene Axe rotiren und bestimmen ihre jeweilige Lage durch ihre Neigung φ gegen eine feste Anfangslage $\varphi = 0$. Aus den ***Curven*** $\lambda = \text{const.}$ und $\vartheta = \text{const.}$ entstehen bei dieser Rotation gewisse ***Flächen*** $\lambda = \text{const.}$ und $\vartheta = \text{const}$, aus den λ-Kreisen Kugelflächen, ***λ-Kugelflächen,*** aus den ϑ-Bogen gewisse Flächen, die wir als ***Conoidflächen*** bezeichnen wollen. Wir verstehen also unter dieser Bezeichnung Rotationsflächen von Kreisbogen um ihre Sehnen.

In jedem beliebigen Punkte ξ des Raumes werden sich alsdann drei Flächen, eine Kugelfläche $\lambda = \text{const.}$, eine Conoidfläche $\vartheta = \text{const.}$ und eine Meridianhalbebene $\varphi = \text{const.}$ orthogonal schneiden, und wie der Punkt ξ diese drei Flächen eindeutig bestimmt, so bestimmen umgekehrt auch diese drei Flächen eindeutig die Lage des Punktes ξ. Wir können daher die diesen Flächen charakteristischen Grössen λ, ϑ und φ direct zur Bestimmung des Punktes ξ benutzen. Es sind dies die ***dipolaren Raumcoordinaten*** desselben.

Die λ-Coordinate kann im Raume alle Werthe zwischen den Grenzen $+\infty$ und $-\infty$ annehmen. Dem ersteren Werthe entspricht der Pol A_1, dem letzteren der Pol A_2. Als λ-Kugelfläche speciell mit dem Parameter $\lambda = 0$ gehört dem System die ***Symmetrieebene*** desselben an, die der Symmetrie***geraden*** entsprechende zu den Polen A_1 und A_2 mittelsenkrechte Ebene. — Die ϑ-Coordinate sodann läuft im räumlichen dipolaren System nur von 0 bis π, da sie hier nur zur Bestimmung eines Punktes in einer ***Halb***ebene, der Meridianhalbebene, dient. — Die dritte Coordinate endlich, das Azimut φ dieser Meridianhalbebenen läuft von 0 bis 2π.

Neben λ, ϑ, φ werden wir übrigens jedem Punkte im Raume, gleichsam als vierte (überflüssige) Coordinate noch eine Grösse ψ zuordnen. Es soll ψ stets als Abkürzung in der folgenden Bedeutung gebraucht werden:

$$\psi = e^{\lambda}+e^{-\lambda}-2\cos\vartheta. \tag{3.}$$

Führen wir nun ein rechtwinkliges Coordinatensystem ein, indem wir den Halbirungspunkt der Pollinie zum Anfangspunkt, die Axe des dipolaren Systems (Richtung $A_1 \to A_2$) zur X-Axe und endlich die Meridianebene $\varphi = 0$ zur X, Y-Ebene wählen, so drücken sich die rechtwinkligen Coordinaten x, y, z eines beliebigen Punktes ξ durch dessen dipolare Coordinaten

λ, ϑ, φ, und ψ folgendermassen aus:

$$(4.)\quad x = a\frac{e^{-\lambda}-e^{+\lambda}}{\psi},\quad y = 2a\frac{\sin\vartheta}{\psi}\cos\varphi,\quad z = 2a\frac{\sin\vartheta}{\psi}\sin\varphi.$$

Das Quadrat der Entfernung r zweier beliebigen Punkte ξ und ξ_0 im Raume stellt sich sodann, ausgedrückt in den dipolaren Coordinaten λ, ϑ, φ; ψ und λ_0, ϑ_0, φ_0; ψ_0 dieser Punkte folgendermassen dar:

$$(5.)\quad r^2 = 4a^2\frac{e^{\lambda-\lambda_0}+e^{\lambda_0-\lambda}-2\cos\gamma}{\psi\cdot\psi_1},\ \text{wo}\ \cos\gamma = \cos\vartheta\cdot\cos\vartheta_0+\sin\vartheta\cdot\sin\vartheta_0\cos(\varphi-\varphi_0).$$

Bemerkt sei noch die einfache geometrische Bedeutung der so definirten Grösse γ. Es ist nämlich γ der Winkel, den die beiden durch ξ und ξ_0 gehenden ϑ-Bogen in einem der Pole mit einander bilden. (6.)

Speciell für die Entfernungen ϱ_1 und ϱ_2 des Punktes ξ von den beiden Polen ergeben sich aus (5.) durch einen leichten Grenzübergang die Werthe

$$(7.)\qquad \varrho_1 = 2a\frac{e^{-\frac{\lambda}{2}}}{\sqrt{\psi}},\qquad \varrho_2 = 2a\frac{e^{+\frac{\lambda}{2}}}{\sqrt{\psi}},$$

woraus sofort die folgende Beziehung folgt:

$$(8.)\qquad \varrho_1\cdot\varrho_2 = \frac{4a^2}{\psi}.$$

Durch einen anderen Grenzübergang erhalten wir sodann aus der Formel (5.) für das Quadrat des zwei unendlich benachbarte Punkte λ, ϑ, φ und $\lambda+d\lambda$, $\vartheta+d\vartheta$, $\varphi+d\varphi$ verbindenden Linienelementes ds den folgenden Ausdruck:

$$(9.)\qquad ds^2 = \frac{4a^2}{\psi^2}\left\{(d\lambda)^2+(d\vartheta)^2+\sin^2\vartheta\cdot(d\varphi)^2\right\}. \text{ —}$$

Sodann sei hier auch noch der ebenso einfachen, wie wichtigen Entwickelung der reciproken Entfernung $\frac{1}{r}$ zweier Punkte ξ und ξ_0 nach Kugelfunctionen, der Entwickelung

$$(10.)\qquad \frac{1}{r} = \frac{\sqrt{\psi}\sqrt{\psi_0}}{2a}\sum_{n=0}^{\infty} e^{\pm N(\lambda-\lambda_0)}P_n(\cos\gamma)$$

gedacht, und der analogen Entwickelung der Grösse $\frac{1}{\sqrt{\psi}}$

$$(11.)\qquad \frac{1}{\sqrt{\psi}} = \sum_{n=0}^{\infty} e^{\pm N\lambda}P_n(\cos\vartheta),$$

wo $N = n+\frac{1}{2}$, und wo von den beiden Vorzeichen stets dasjenige zu wählen ist, welches den Exponenten negativ macht. —

Schliesslich sei hier noch die Frage erörtert, welche dipolaren Coordinaten einem unendlich fernen Punkte zukommen. — Wir denken uns zu diesem Zwecke den Punkt ξ immer weiter fort, schliesslich ins Unendliche gerückt. Dann werden die beiden Pole A_1 und A_2 von ξ aus gesehen, wie in einen einzigen Punkt coincidirend erscheinen, d. h. die Polabstände ϱ_1 und ϱ_2 werden mit einander schliesslich den Winkel $\vartheta = 0$ einschliessen, und ausserdem wird sich ihr Verhältniss $\frac{\varrho_1}{\varrho_2}$ immer mehr und mehr der 1 nähern, und es wird daher nach der Formel (1.) schliesslich $\lambda = 0$ werden. Das Resultat lautet also:

Ein unendlich ferner Punkt besitzt die dipolaren Coordinaten

(12.) $\lambda = 0$ *und* $\vartheta = 0$ (*also auch* $\psi = 0$)

die dritte Coordinate φ hingegen bleibt unbestimmt, sie kann verschiedene Werthe annehmen.

§ 2. Die Orthogonalkugelfläche.

Die dipolaren Coordinaten sind vielfach angewandt bei Behandlung solcher physikalischer Probleme, die Bezug haben auf zwei Kugeln, oder aber auf Körper, die von einer Conoidfläche begrenzt werden. Es drücken sich eben diese Flächen in so einfacher Weise in jenen Coordinaten aus.

Doch die dipolaren Coordinaten besitzen noch ein weiteres Feld der Anwendbarkeit. Wie wir jetzt näher darlegen wollen, lassen sich auch noch andere Flächen in ihnen höchst einfach analytisch darstellen.

Wir markieren in der Symmetrieebene $\lambda = 0$ des dipolaren Systems einen beliebigen Punkt $c(\vartheta_c, \varphi_c)$. Derselbe besitzt dann von den beiden Polen denselben Abstand $\varrho = \frac{2a}{\sqrt{\psi_c}}$ (vgl. (7.) S. 65).

Wir wollen nun die übrigen Punkte näher bestimmen, die von c den nämlichen Abstand ϱ besitzen. Bezeichnen wir allgemein die Entfernung eines Punktes $(\lambda, \vartheta, \varphi)$ von c mit r, so entsprechen die Coordinaten speciell der gesuchten Punkte der Bedingung

$$r = \varrho \qquad \text{oder} \qquad r^2 = \varrho^2$$

d. i. in dipolaren Coordinaten nach (5.) S. 65, da $\lambda_c = 0$ ist,

$$\frac{4a^2}{\psi_c} \cdot \frac{e^\lambda + e^{-\lambda} - 2\cos\gamma}{\psi} = \frac{4a^2}{\psi_c}, \qquad \frac{e^\lambda + e^{-\lambda} - 2\cos\gamma}{e^\lambda + e^{-\lambda} - 2\cos\vartheta} = 1$$

oder endlich

$$\cos\gamma = \cos\vartheta, \quad \text{d. i.} \quad \cos\vartheta . \cos\vartheta_c + \sin\vartheta . \sin\vartheta_c \cos(\varphi - \varphi_c) = \cos\vartheta.$$

Dies ist also in dipolaren Coordinaten die Gleichung einer um den

Punkt c beschriebenen Kugelfläche, welche durch die Pole A_1 und A_2 hindurchgeht. — Die Gleichung stellt eine Relation allein zwischen den beiden letzten Coordinaten ϑ und φ dar, besagt also, dass die Fläche gebildet wird von lauter ϑ-Bogen, die in verschiedenen Meridianebenen liegen, wie dies die Anschauung sofort bestätigt.

Da nun jeder ϑ-Bogen sämmtliche λ-Kugelflächen orthogonal schneidet, so wird Gleiches auch gelten von dieser, von lauter ϑ-Bogen gebildeten Kugelfläche; wir können also sagen:

Eine Kugelfläche, deren Centrum in der Symmetrieebene $\lambda = 0$ eines dipolaren Coordinatensystems liegt, und die durch die Pole dieses Systems hindurchgeht, schneidet die sämmtlichen λ-Kugelflächen orthogonal. Sie heisse daher kurz Orthogonalkugelfläche.

Die Gleichung einer solchen Orthogonalkugelfläche ist

$$\cos\gamma = \cos\vartheta, \quad \textit{d. h.} \quad \cos\vartheta\cos\vartheta_c + \sin\vartheta\sin\vartheta_c\cos(\varphi - \varphi_c) = \cos\vartheta,$$

wo ϑ_c und φ_c die Coordinaten des Kugelcentrums sind.

Den ϑ-Bogen, in welchem die durch das Kugelcentrum c gelegte Meridianhalbebene die Orthogonalkugelfläche schneidet, also den grössten aller ϑ-Bogen dieser Fläche wollen wir kurz als ***Hauptmeridian*** der Orthogonalkugel bezeichnen. (Derselbe ist im allgemeinen kein Halbkreis, sondern grösser als ein solcher.)

Welchen Parameter ϑ besitzt nun dieser Hauptmeridian? Die Gleichung $\cos\vartheta = \cos\gamma$ besagt nach der Bemerkung (6.) S. 65, dass die die Orthogonalkugelfläche erzeugenden ϑ-Bogen gleiche Winkel bilden mit dem Complement der Pollinie einerseits und mit dem durch das Centrum c hindurchgehenden ϑ-Bogen andererseits. Der Hauptmeridian, welcher mit diesen beiden Linien in einer Ebene liegt, wird also den Winkel zwischen ihnen halbiren, und wird daher nach (2.) S. 63 den Parameter $\frac{\vartheta_c}{2}$ besitzen, ein Resultat, das zur Controlle unserer letzten Ausführungen dient, denn im Grunde ist es nichts anderes, als der bekannte Satz, dass ein Peripheriewinkel halb so gross ist als der entsprechende Centriwinkel.

§ 3. Weitere Sätze über dipolare Coordinaten. Analogie zwischen λ-Kreisen und ϑ-Bogen.

Wir wollen uns jezt einstweilen der Betrachtung *ebener* dipolarer Coordinaten zuwenden, wie sich auch schon die letzten Ueberlegungen des vorigen Paragraphen lediglich auf solche ebene Coordinaten bezogen.

Aus diesen Ueberlegungen folgt sofort unter gewissen Beschränkungen folgender Satz:

Satz α. — *Ist irgend ein ϑ-Bogen vom Parameter ϑ_1 gegeben, so besitzt sein Mittelpunkt die ϑ-Coordinate* $2\vartheta_1$.

Die erwähnte Beschränkung, unter der die Richtigkeit dieses Satzes sofort einleuchtet, besteht darin, dass $\vartheta < \pi$ sei; doch können wir den Satz auch von dieser Beschränkung befreien, wenn wir nur festsetzen, dass unter ϑ-Bogen mit den Parametern ϑ und $\vartheta + 2\pi$ immer ein und derselbe Bogen zu verstehen ist, die ϑ-Coordinate also immer nur bis auf additive Vielfache von 2π eindeutig bestimmt ist. —

Jenem Satze über ϑ-Bogen stellt sich nun ein Satz über λ-Kreise an die Seite, welcher folgendermassen lautet:

Satz *A*. — *Ist irgend ein λ-Kreis vom Parameter λ_1 gegeben, so besitzt sein Mittelpunkt die λ-Coordinate* $2\lambda_1$.

Dieser letztere Satz stellt sich nun aber nur als Spezialfall eines allgemeineren, nämlich des folgenden Satzes dar*):

Satz *B*. — *Sind ξ und ξ' zwei Punkte, die einander nach dem Gesetze der reciproken Radien conjugirt sind in Bezug auf einen λ-Kreis vom Parameter λ_1, so entsprechen ihre λ-Coordinaten λ und λ' der Relation:*

$$\lambda + \lambda' = 2\lambda_1.$$

Wir brauchen hier nämlich nur den Punkt ξ' ins Unendliche rücken zu lassen, nach dem Satze S. 66 also $\lambda' = 0$ zu machen, um für den conjugirten Punkt, d. h. für das Centrum des Abbildungskreises die λ-Coordinate $2\lambda_1$ zu erhalten. —

Es liegt nun die Vermuthung sehr nahe, dass sich analog auch unser obiger Satz α verallgemeinern lässt. Um dies näher zu untersuchen, nehmen wir zwei Punkte ξ und ξ' an, die einander conjugirt sind in Bezug auf denjenigen Kreis, dem ein ϑ-Bogen mit dem Parameter ϑ_1 angehört, und construiren sodann die beiden durch ξ und ξ' gehenden ϑ-Bogen ϑ und ϑ'. Dieselben sind dann einander conjugirt, denn es sind Kreisbogen, die durch je drei einander conjugirte Punkte gehen, nämlich durch ξ bezw. ξ' und durch A_1 und A_2, welch letztere Punkte sich selber conjugirt sind. — In derselben Weise sich selber conjugirt ist auch der ganze Bogen ϑ_1 und

*) Vgl. *C. Neumann's „Hydrodynamische Untersuchungen“* (Leipzig bei Teubner 1883) pg. 150 und sein daselbst citirtes Werk vom Jahre 1862.

es folgt daher, dass als Winkel zwischen conjugirten Elementen

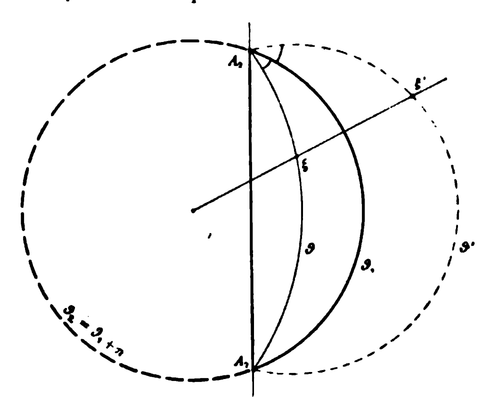
$$\text{Winkel } (\vartheta_1 \vartheta) = \text{Winkel } (\vartheta_1, \vartheta')$$

ist. — Nun wird der Parameter ϑ_1 augenscheinlich zwischen ϑ und ϑ' liegen, wir können etwa annehmen, es sei: $\vartheta > \vartheta_1 > \vartheta'$. Dann ist

$$\text{Winkel } (\vartheta_1, \vartheta) = \vartheta - \vartheta_1 \text{ und Winkel } (\vartheta_1, \vartheta') = \vartheta_1 - \vartheta',$$

es folgt also:

$$\vartheta - \vartheta_1 = \vartheta_1 - \vartheta' \quad \text{oder} \quad \vartheta + \vartheta' = 2\vartheta_1.$$



Bei Ableitung dieser Formel haben wir jedoch stillschweigend gewisse Annahmen über die relative Lage des Punktes ξ zum ϑ-Bogen ϑ_1 gemacht, es muss augenscheinlich unter Umständen an die Stelle des Bogens ϑ_1 der complementäre Bogen $\vartheta_2 = \vartheta_1 + \pi$ treten, sodass wir das folgende Resultat erhalten:

Satz β. — *Sind ξ und ξ' zwei Punkte die conjugirt sind in Bezug auf einen Kreis, der gebildet wird von zwei ϑ-Bogen mit den Parametern ϑ_1 und $\vartheta_2 = \vartheta_1 + \pi$, so findet zwischen ihren ϑ-Coordinaten ϑ und ϑ' die Beziehung statt:*

$$\vartheta + \vartheta' = 2\vartheta_1, \text{ bezw. } = 2\vartheta_2.$$

Dieser Satz β stellt augenscheinlich das vollständige Analogon zu dem obigen Satze *B* über λ-Kreise dar, und enthält, wie dieser den Satz *A*, so seinerseits den Satz α als Spezialfall.

Diese Analogie zwischen ϑ-Bogen einerseits und λ-Kreisen andererseits zeigt sich nun auch in einer Reihe weiterer Sätze. So folgt z. B. aus den von *C. Neumann* in seinen „Hydrodynamischen Untersuchungen", pag. 108—109 angestellten Ueberlegungen, falls wir dieselben aus dem Raume in die Ebene übertragen der folgende Satz:

Satz *C.* — *Bezeichnet n die äussere Normale eines λ-Kreises vom Parameter λ_1, so ist in allen Punkten $(\lambda_1, \vartheta_1; \psi_1)$ dieses Kreises:*

$$\frac{\partial \lambda}{\partial n} = \mp \frac{\psi_1}{2a},$$

wo das obere oder das untere Vorzeichen zu wählen ist, je nachdem λ_1 positiv oder negativ ist, und durch ganz analoge Betrachtungen ergiebt sich der folgende Parallelsatz.

Satz γ. — *Bezeichnet n bei einem ϑ-Bogen vom Parameter ϑ_1 die äussere, d. h. auf seiner convexen Seite errichtete Normale, so ist in allen Punkten $(\lambda_1, \vartheta_1; \psi_1)$ dieses Bogens*

$$\frac{\partial\vartheta}{\partial n} = \mp\frac{\psi_1}{2a},$$

wo das obere oder das untere Vorzeichen zu wählen ist, je nachdem ϑ_1 zwischen 0 und π oder zwischen π und 2π gelegen ist.

In Anbetracht der grossen, auch hier zu Tage tretenden Analogie zwischen λ-Kreisen und ϑ-Bogen, ist es wohl nicht ohne Interesse, auf eine völlig analoge Entstehungsweise dieser beiden Curvenschaaren hinzuweisen.

Sind irgend zwei Kreise in einer Ebene gegeben, deren Gleichungen in rechtwinkligen Coordinaten $L = 0$ und $K = 0$ sind, so stellt bekanntlich, wenn wir μ als veränderlichen Parameter ansehen, $L + \mu K = 0$ die Gleichung eines Kreisbüschels dar, d. h. aller Kreise, welche durch die Schnittpunkte von $L = 0$ und $K = 0$ hindurchgehen, mögen diese Schnittpunkte nun reell oder imaginär sein. Im letzteren Falle ist das Büschel identisch mit dem System der λ-Kreise eines dipolaren Systems, im ersteren dagegen mit dem System der ϑ-Bogen (nebst den complementären Bogen), oder: *Die λ-Kreise bilden ein Kreisbüschel mit imaginären, die ϑ-Bogen ein Kreisbüschel mit reellen Schnittpunkten.*

Nach dieser Digression wollen wir noch die letzten für *ebene* dipolare Coordinaten angegebenen Sätze (C und γ) auf den Raum übertragen. Wir verstehen demgemäss jetzt unter n die äussere Normale einer λ-Kugelfläche bezw. einer Conoidfläche. In jedem Falle wird diese Normale ganz in eine Meridianebene fallen, es werden also nur Punkte eines ebenen dipolaren Systems berührt und es gelten demgemäss die für $\frac{\partial\lambda}{\partial n}$ und $\frac{\partial\vartheta}{\partial n}$ in ebenen dipolaren Coordinaten abgeleiteten Formeln unverändert auch im Raume:

Satz D. — *Bezeichnet n die äussere Normale einer λ-Kugelfläche vom Parameter λ_1, so ist in jedem Punkte $(\lambda_1, \vartheta_1, \varphi_1; \psi_1)$ dieser Kugelfläche*

$$\frac{\partial\lambda}{\partial n} = \mp\frac{\psi_1}{2a},$$

wo das obere oder das untere Vorzeichen zu wählen ist, je nachdem der Parameter λ_1 positiv oder negativ ist.

Satz δ. — *Bezeichnet n die äussere Normale einer Conoidfläche vom Parameter ϑ_1, so ist in jedem Punkte $(\lambda_1, \vartheta_1, \varphi_1; \psi_1)$ dieser Conoidfläche*

$$\frac{\partial\vartheta}{\partial n} = -\frac{\psi_1}{2a}.$$

(Es kommt hier nur das negative Vorzeichen in Anwendung, da die ϑ-Coordinate im Raume auf das Intervall 0 bis π beschränkt ist.)

§ 4. Eine Aufgabe, betreffend die Orthogonalkugelfläche.

Wir haben soeben die Ableitungen der dipolaren Coordinaten nach den Normalen einer λ-Kugelfläche und einer Conoidfläche angegeben. Wir wollen nun analog auch die Ableitungen nach der Normalen einer Orthogonalkugelfläche bestimmen.

Es sei also eine Orthogonalkugelfläche σ_0 gegeben; ihr Centrum c besitze die Coordinaten ϑ_c und φ_c (λ_c ist $=0$); ihre Gleichung sei daher

$$(1.)\qquad \cos\gamma \equiv \cos\vartheta.\cos\vartheta_c + \sin\vartheta.\sin\vartheta_c\cos(\varphi-\varphi_c) = \cos\vartheta.$$

Es handle sich dann darum, für beliebige Punkte $(\lambda_0, \vartheta_0, \varphi_0; \psi_0)$ dieser Kugelfläche die Ableitungen $\frac{\partial\lambda}{\partial n}$, $\frac{\partial\vartheta}{\partial n}$ und $\frac{\partial\varphi}{\partial n}$ zu berechnen, wenn n die äussere Normale der Fläche bedeutet.

Was nun die erste dieser Grössen anlangt, so sei daran erinnert, dass σ_0 sämmtliche λ-Kugelflächen orthogonal durchschneidet. Daraus folgt sofort

$$(2.)\qquad \frac{\partial\lambda}{\partial n} = 0.$$

Um nun auch $\frac{\partial\vartheta}{\partial n}$ und $\frac{\partial\varphi}{\partial n}$ zu berechnen, führen wir neben dem dipolaren Coordinatensystem λ, ϑ, φ noch ein gewöhnliches Polarcoordinatensystem r, ω, o ein, dessen Pol wir in das Centrum c unserer Orthogonalkugel σ_0 verlegen. — Dann gehört σ_0 diesem System als Fläche $r=$ const. an und zwar ist speciell

$$r = \varrho, \qquad \text{wo} \qquad \varrho = \frac{2a}{\sqrt{\psi_c}} = \frac{a}{\sin\frac{\vartheta_c}{2}}$$

der Polabstand des Punktes c, der Radius der Kugelfläche σ_0 ist. (vgl. (7.) S. 65) — Ferner ist

$$(3.)\qquad \frac{\partial\lambda}{\partial n} = \left(\frac{\partial\lambda}{\partial r}\right)_0, \quad \frac{\partial\vartheta}{\partial n} = \left(\frac{\partial\vartheta}{\partial r}\right)_0, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial n} = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right)_0,$$

wo der Index 0 andeuten soll, dass der betreffende Ausdruck speciell zu bilden ist für einen Punkt der Orthogonalkugelfläche σ_0 ($\cos\gamma = \cos\vartheta$, $r=\varrho$).

Nun ist r der Abstand des variablen Punktes $\xi\,(\lambda, \vartheta, \varphi; \psi)$ vom Kugelcentrum c, mithin

$$r^2 = \frac{4a^2}{\psi_c}\cdot\frac{e^{\lambda-\lambda_c}+e^{\lambda_c-\lambda}-2\cos\gamma}{\psi} \qquad \text{(vgl (5.) S. 65)}$$

oder, da $\lambda_c = 0$ und $\frac{2a}{\sqrt{\psi_c}} = \varrho$ ist:

$$(4.) \qquad r^2 = \varrho^2 \frac{e^\lambda + e^{-\lambda} - 2\cos\gamma}{\psi} = \varrho^2 \cdot \frac{\chi}{\psi},$$

wo also

$$(4'.) \quad \begin{cases} \psi = e^\lambda + e^{-\lambda} - 2\cos\vartheta, & \chi = e^\lambda + e^{-\lambda} - 2\cos\gamma \\ \cos\gamma = \cos\vartheta . \cos\vartheta_c + \sin\vartheta . \sin\vartheta_c \cos(\varphi - \varphi_c) \end{cases}$$

ist, und ähnliche Relationen drücken auch die weiteren gewöhnlichen Polarcoordinaten ω und o durch die dipolaren Coordinaten λ, ϑ, φ von ξ aus:

$$(5.) \qquad \omega = \omega(\lambda, \vartheta, \varphi), \qquad o = o(\lambda, \vartheta, \varphi).$$

Diese Gleichungen (4.) und (5.) können aber weiter auch dazu dienen, die *Incremente* von r, ω, o bei einer unendlich kleinen Verrückung von ξ auszudrücken durch die entsprechenden Incremente von λ, ϑ und φ; es folgt

$$(6.) \quad \begin{cases} dr = \frac{\partial r}{\partial \lambda} d\lambda + \frac{\partial r}{\partial \vartheta} d\vartheta + \frac{\partial r}{\partial \varphi} \cdot d\varphi \\ d\omega = \frac{\partial \omega}{\partial \lambda} d\lambda + \frac{\partial \omega}{\partial \vartheta} d\vartheta + \frac{\partial \omega}{\partial \varphi} \cdot d\varphi \\ do = \frac{\partial o}{\partial \lambda} d\lambda + \frac{\partial o}{\partial \vartheta} d\vartheta + \frac{\partial o}{\partial \varphi} \cdot d\varphi \end{cases}$$

und hieraus folgt durch Auflösung sofort weiter:

$$(7.) \quad \begin{cases} \varDelta \cdot d\lambda = A \cdot dr + A' \cdot d\omega + A'' \cdot do, \\ \varDelta \cdot d\vartheta = B \cdot dr + B' \cdot d\omega + B'' \cdot do, \\ \varDelta \cdot d\varphi = \Gamma \cdot dr + \Gamma' \cdot d\omega + \Gamma'' \cdot do, \end{cases}$$

wo $\varDelta$ die Determinante der Gleichungen (6.) und die Coefficienten rechterhand die entsprechenden zweireihigen Unterdeterminanten derselben bedeuten.

Aus diesen Gleichungen (7.) ergiebt sich nun sofort:

$$\frac{\partial \lambda}{\partial r} = \frac{A}{\varDelta}, \qquad \frac{\partial \vartheta}{\partial r} = \frac{B}{\varDelta}, \qquad \frac{\partial \varphi}{\partial r} = \frac{\Gamma}{\varDelta},$$

also mit Rücksicht auf (3.)

$$(8.) \qquad \frac{\partial \lambda}{\partial n} = \frac{A_0}{\varDelta_0}, \qquad \frac{\partial \vartheta}{\partial n} = \frac{B_0}{\varDelta_0}, \qquad \frac{\partial \varphi}{\partial n} = \frac{\Gamma_0}{\varDelta_0}$$

Es ist aber, wie wir sahen $\frac{\partial \lambda}{\partial n} = 0$ (vgl. (2.)), also folgt $\Delta_0 = 0$, d. i.

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial \omega}{\partial \vartheta} & \frac{\partial \omega}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial o}{\partial \vartheta} & \frac{\partial o}{\partial \varphi} \end{vmatrix}_0 = 0, \qquad \left(\frac{\partial \omega}{\partial \vartheta}\right)_0 : \left(\frac{\partial \omega}{\partial \varphi}\right)_0 = \left(\frac{\partial o}{\partial \vartheta}\right)_0 : \left(\frac{\partial o}{\partial \varphi}\right)_0.$$

Wir bezeichnen den gemeinsamen Werth dieser letzteren Quotienten mit f_0, sodass

$$(9.) \qquad \left(\frac{\partial \omega}{\partial \vartheta}\right)_0 = f_0 \left(\frac{\partial \omega}{\partial \varphi}\right)_0 \quad \text{und} \quad \left(\frac{\partial o}{\partial \vartheta}\right)_0 = f_0 \left(\frac{\partial o}{\partial \varphi}\right)_0$$

ist. Hier bedeutet dann $f_0 = f(\lambda_0, \vartheta_0, \varphi_0)$ eine vorläufig freilich noch unbekannte Function.

Durch diese Relationen (9.) vereinfacht sich nun unsere Determinante Δ_0 sehr wesentlich. Es folgt nach bekanntem Determinantensatze:

$$\Delta_0 = \begin{vmatrix} \frac{\partial r}{\partial \lambda} & \frac{\partial r}{\partial \vartheta} & \frac{\partial r}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial \omega}{\partial \lambda} & f \cdot \frac{\partial \omega}{\partial \varphi} & \frac{\partial \omega}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial o}{\partial \lambda} & f \cdot \frac{\partial o}{\partial \varphi} & \frac{\partial o}{\partial \varphi} \end{vmatrix}_0 = \begin{vmatrix} \frac{\partial r}{\partial \lambda} & \frac{\partial r}{\partial \vartheta} - f \frac{\partial r}{\partial \varphi} & \frac{\partial r}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial \omega}{\partial \lambda} & 0 & \frac{\partial \omega}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial o}{\partial \lambda} & 0 & \frac{\partial o}{\partial \varphi} \end{vmatrix}_0$$

oder

$$(10.) \qquad \Delta_0 = -\left(\frac{\partial r}{\partial \vartheta} - f \frac{\partial r}{\partial \varphi}\right)_0 \begin{vmatrix} \frac{\partial \omega}{\partial \lambda} & \frac{\partial \omega}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial o}{\partial \lambda} & \frac{\partial o}{\partial \varphi} \end{vmatrix}_0 = \left(\frac{\partial r}{\partial \vartheta} - f \frac{\partial r}{\partial \varphi}\right)_0 \cdot B_0$$

und ferner folgt mit Rücksicht auf die Relationen (9.):

$$\Gamma_0 = \begin{vmatrix} \frac{\partial \omega}{\partial \lambda} & f \cdot \frac{\partial \omega}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial o}{\partial \lambda} & f \cdot \frac{\partial o}{\partial \varphi} \end{vmatrix}_0 = -f_0 \cdot B_0;$$

also ergiebt sich zunächst: $\frac{\Gamma_0}{\Delta_0} = -f_0 \frac{B_0}{\Delta_0}$, d. i. nach (8.):

$$(11.) \qquad \frac{\partial \varphi}{\partial n} = -f_0 \cdot \frac{\partial \vartheta}{\partial n},$$

und sodann folgen aus (10.) und (11.) sofort für $\frac{\partial \vartheta}{\partial n}$ und $\frac{\partial \varphi}{\partial n}$ selber die Werthe:

$$(12.) \quad \frac{\partial \vartheta}{\partial n} = \frac{B_0}{\Delta_0} = \frac{1}{\left(\frac{\partial r}{\partial \vartheta} - f \frac{\partial r}{\partial \varphi}\right)_0}, \qquad \frac{\partial \varphi}{\partial n} = -\frac{f_0}{\left(\frac{\partial r}{\partial \vartheta} - f \frac{\partial r}{\partial \varphi}\right)_0}.$$



Aus (4.) und (4'.) folgt nun aber weiter:

$$2r\frac{\partial r}{\partial\vartheta}=\varrho^2\frac{\psi\frac{\partial\chi}{\partial\vartheta}-\chi\frac{\partial\psi}{\partial\vartheta}}{\psi^2},\qquad 2r\frac{\partial r}{\partial\varphi}=\varrho^2\frac{\frac{\partial\chi}{\partial\varphi}}{\psi},$$

und, wenn wir speciell zu Punkten der Fläche ϱ_0 übergehen, wo $r=\varrho$, $\cos\gamma=\cos\vartheta$ und mithin nach (4'.) auch $\chi=\psi$ ist,

$$(13.)\quad \left(\frac{\partial r}{\partial\vartheta}\right)_0=\frac{\varrho}{2\psi_0}\left(\frac{\partial\chi}{\partial\vartheta}-\frac{\partial\psi}{\partial\vartheta}\right)_0,\qquad \left(\frac{\partial r}{\partial\varphi}\right)_0=\frac{\varrho}{2\psi_0}\left(\frac{\partial\chi}{\partial\varphi}\right)_0.$$

Substituiren wir diese Werthe in (12.), so ergiebt sich:

$$(14.)\quad \frac{\partial\vartheta}{\partial n}=\frac{2\psi_0}{\varrho}\cdot\frac{1}{\left\{\left(\frac{\partial\chi}{\partial\vartheta}-\frac{\partial\psi}{\partial\vartheta}\right)-f\frac{\partial\chi}{\partial\varphi}\right\}_0},\quad \frac{\partial\varphi}{\partial n}=-\frac{2\psi_0}{\varrho}\,\frac{f_0}{\left\{\left(\frac{\partial\chi}{\partial\vartheta}-\frac{\partial\psi}{\partial\vartheta}\right)-f\frac{\partial\chi}{\partial\varphi}\right\}_0}.$$

Die Ableitungen $\frac{\partial\psi}{\partial\vartheta}$, $\frac{\partial\chi}{\partial\vartheta}$, $\frac{\partial\chi}{\partial\varphi}$ sind nun leicht aus (4'.) zu berechnen. — Wir haben mithin $\frac{\partial\vartheta}{\partial n}$ und $\frac{\partial\varphi}{\partial n}$ zurückgeführt auf eine einzige vorläufig unbekannte Function f_0.

Das genügt für viele Zwecke; so werden wir z. B. die Grössen $\frac{\partial\vartheta}{\partial n}$ und $\frac{\partial\varphi}{\partial n}$ in dieser Form (14.) weiter unten anwenden, doch wollen wir im folgenden Paragraphen unsere Aufgabe noch weiter fördern, auch noch jene unbekannte Function f_0 eliminiren und somit $\frac{\partial\vartheta}{\partial n}$ und $\frac{\partial\varphi}{\partial n}$ direct ausdrücken durch lauter gegebene Grössen.

§ 5. Fortsetzung.

Bei Behandlung der soeben angegebenen Aufgabe scheint mir am leichtesten der folgende Weg zum Ziele zu führen; wenigstens vermeidet man es bei ihm die Beziehungsgleichungen (5.) explicite aufzustellen, was unter allen Umständen eine recht mühsame Arbeit sein dürfte.

Wir drücken das Quadrat eines Linienelementes ds in doppelter Weise aus, einmal durch die Incremente dr, $d\omega$, do der gewöhnlichen Polarcoordinaten*) und sodann durch die Incremente $d\lambda$, $d\vartheta$, $d\varphi$ der dipolaren

*) Man vergleiche dieserhalb z. B. die Vorlesungen von *F. Neumann* über das Potential und die Kugelfunctionen (Leipzig bei Teubner 1887), daselbst S. 22 Formel (3.). Doch sind die Bezeichnungen dort etwas andere.

Coordinaten (vgl. (9.) S. 65). Wir erhalten so die Gleichung:

$$(dr)^2+r^2(d\omega)^2+r^2\sin^2\omega(do)^2 = \frac{4a^2}{\psi^2}\left\{(d\lambda)^2+(d\vartheta)^2+\sin^2\vartheta(d\varphi)^2\right\}.$$

Denken wir uns nun hier linkerhand die Ausdrücke (6.) für dr, $d\omega$, do eingesetzt, so folgen durch Coefficientenvergleichung sofort u. a. diese drei Gleichungen (Orthogonalitätsbedingungen):

$$(15.)\begin{cases} \text{a)} & \frac{\partial r}{\partial\vartheta}\cdot\frac{\partial r}{\partial\varphi}+r^2\frac{\partial\omega}{\partial\vartheta}\cdot\frac{\partial\omega}{\partial\varphi}+r^2\sin^2\omega\cdot\frac{\partial o}{\partial\vartheta}\cdot\frac{\partial o}{\partial\varphi} = 0, \\ \text{b)} & \left(\frac{\partial r}{\partial\vartheta}\right)^2+r^2\left(\frac{\partial\omega}{\partial\vartheta}\right)^2+r^2\sin^2\omega\cdot\left(\frac{\partial o}{\partial\vartheta}\right)^2 = \frac{4a^2}{\psi^2}, \\ \text{c)} & \left(\frac{\partial r}{\partial\varphi}\right)^2+r^2\left(\frac{\partial\omega}{\partial\varphi}\right)^2+r^2\sin^2\omega\cdot\left(\frac{\partial o}{\partial\varphi}\right)^2 = \frac{4a^2}{\psi^2}\sin^2\vartheta. \end{cases}$$

Wir combiniren diese Gleichungen nun zunächst mit einander in der Weise, dass wir die mit der unbekannten Function f multiplicirte Gleichung a) von der Gleichung b) und sodann die mit f multiplicirte Gleichung c) von a) abziehen. Es treten dann jedesmal in den beiden letzten Gliedern linkerhand die Factoren $\frac{\partial\omega}{\partial\vartheta}-f\frac{\partial\omega}{\partial\varphi}$ und $\frac{\partial o}{\partial\vartheta}-f\frac{\partial o}{\partial\varphi}$ auf und diese verschwinden nach (9.), sobald wir speciell zu Punkten der Orthogonalkugelfläche übergehen. Wir erhalten also

$$\left(\frac{\partial r}{\partial\vartheta}\right)_0\left(\frac{\partial r}{\partial\vartheta}-f\frac{\partial r}{\partial\varphi}\right)_0 = \frac{4a^2}{\psi_0^2} \quad \text{und} \quad \left(\frac{\partial r}{\partial\varphi}\right)_0\left(\frac{\partial r}{\partial\vartheta}-f\frac{\partial r}{\partial\varphi}\right)_0 = -f_0\frac{4a^2}{\psi_0^2}\sin^2\vartheta_0,$$

und daraus folgt nach (12.) und (13.):

$$\frac{\partial\vartheta}{\partial n} = \frac{\left(\frac{\partial r}{\partial\vartheta}\right)_0}{\frac{4a^2}{\psi_0^2}} = \frac{\psi_0^2}{4a^2}\cdot\frac{\varrho}{2\psi_0}\left(\frac{\partial\chi}{\partial\vartheta}-\frac{\partial\psi}{\partial\vartheta}\right)_0, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial n} = \frac{\left(\frac{\partial r}{\partial\varphi}\right)_0}{\frac{4a^2}{\psi_0^2}\sin^2\vartheta_0} = \frac{\psi_0^2}{4a^2}\frac{\varrho}{2\psi_0}\frac{\left(\frac{\partial\chi}{\partial\varphi}\right)_0}{\sin^2\vartheta_0}.$$

Berücksichtigen wir nun die Gleichungen (4'.) und sodann die Gleichung (1.) der Orthogonalkugelfläche, so führt uns eine einfache Rechnung zum Resultate, das wir folgendermassen aussprechen können:

Sind ϑ_c und φ_c die Coordinaten des Mittelpunktes einer Orthogonalkugelfläche σ_0 und bezeichnet n die in einem beliebigen Punkte $o(\lambda_0, \vartheta_0, \varphi_0)$ dieser Kugelfläche σ_0 errichtete äussere Normale, so ist:

$$(16).\quad \frac{\partial\lambda}{\partial n} = 0, \quad \frac{\partial\vartheta}{\partial n} = -\frac{\psi_0}{2a}\frac{\sin\frac{\vartheta_c}{2}}{\sin\vartheta_0}, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial n} = \frac{\psi_0}{2a}\cdot\frac{\cos\frac{\vartheta_c}{2}}{\sin\vartheta_0}\sin(\varphi_0-\varphi_c).$$

Lassen wir jetzt den Punkt o speciell in den Hauptmeridian $\left(\vartheta = \frac{\vartheta_c}{2},\quad \varphi = \varphi_c\right)$ unserer Orthogonalkugelfläche hineinrücken, so fällt augenscheinlich die Normale n vollständig in eine Meridianebene, es muss also $\frac{\partial\varphi}{\partial n}$ verschwinden und $\frac{\partial\vartheta}{\partial n}$ wie bei ebenen dipolaren Coordinaten gleich $-\frac{\psi_0}{2a}$ werden. Wie wir sehen bestätigen das unsere obigen allgemeinen Formeln (16.).

Beiläufiges. — Für die Function f_0, welche in den letzten Betrachtungen eine so grosse Rolle spielte, ergiebt sich jetzt aus den Formeln (11.) und (16.) leicht der Werth:

$$f_0 = \frac{\sin(\varphi_0 - \varphi_c)}{\operatorname{tg}\frac{\vartheta_c}{2}}.$$

§ 6. Die dipolaren Coordinaten und die Abbildung nach reciproken Radiivectoren.

Wir wollen jetzt dazu übergehen, in dipolaren Coordinaten die Formeln für die für Probleme der Potentialtheorie so wichtige Abbildung nach reciproken Radien zu entwickeln.

Wir wählen einen beliebigen Punkt o mit den dipolaren Coordinaten $\lambda_0, \vartheta_0, \varphi_0$ zum *Abbildungscentrum*, d. h. zum Mittelpunkte der Abbildungskugelfläche, deren Radius wir mit H bezeichnen. Was entsteht dann durch Abbildung an dieser Kugelfläche aus den Flächen unseres dipolaren Systems? — Nun, das System aller λ-Kugelflächen wird wieder in ein System von Kugelflächen übergehen. Ebenso werden die Bilder der Meridianebenen ein System von Kugelflächen darstellen. Die Bilder der Conoidflächen endlich werden gewisse Flächen sein, auf deren Gestalt wir vor der Hand nicht näher eingehen wollen. Uns interessirt hier nur, dass alle ϑ-Bogen wieder in Kreisbogen übergehen, welche zwei feste Punkte A_1' und A_2', die beiden den Polen A_1 und A_2 conjugirten Punkte mit einander verbinden.

Wie nun im ursprünglichen dipolaren Systeme die ϑ-Bogen die sämmtlichen λ-Kugelflächen orthogonal durchschneiden, so werden wegen der Winkeltreue der Abbildung auch diese Kreisbogen die conjugirten Kugelflächen orthogonal schneiden. Daraus folgt, dass wir diese den

λ-Kugelflächen und den ϑ-Bogen conjugirten Kugelflächen und Kreisbogen wieder ansehen können als die λ-Kugelflächen bezw. ϑ-Bogen eines dipolaren Coordinatensystems. Die Pole A'_1 und A'_2 dieses zweiten Systems sind denen des ersteren conjugirt, sind deren Bildpunkte. Wir wollen daher dieses System kurz das ***Bildsystem*** des ersteren nennen.

Unsere Aufgabe soll nun darin bestehen, die Beziehungen zwischen diesen beiden dipolaren Coordinatensystemen, zwischen dem ursprünglich gegebenen und diesem seinem Bildsystem zu entwickeln, oder genauer gesagt, die Coordinaten λ', ϑ', φ' eines Punktes ξ' im Bildsystem auszudrücken durch die Coordinaten λ, ϑ, φ des conjugirten Punktes ξ in dem ursprünglichen Systeme.

Nun ist λ', also die λ-Coordinate von ξ' im Bildsystem definirt durch die Gleichung

$$e^{-\lambda'} = \frac{\varrho'_1}{\varrho'_2},$$

wo ϱ'_1 und ϱ'_2, die Entfernungen des Punktes ξ' von den Polen A'_1 und A'_2 bedeuten. — Aus ähnlichen Dreiecken folgen nun aber die Proportionen

$$\frac{\varrho'_1}{(o\xi')} = \frac{\varrho_1}{(oA_1)}, \qquad \frac{\varrho'_2}{(o\xi')} = \frac{\varrho_2}{(oA_2)} \qquad \text{(Vgl. die Figur)}$$

und daraus weiter durch Division

$$\frac{\varrho'_1}{\varrho'_2} = \frac{\varrho_1}{\varrho_2}\cdot\frac{(oA_2)}{(oA_1)} \quad \text{d. i.} \quad e^{-\lambda'} = e^{-\lambda}\cdot e^{\lambda_0} = e^{-(\lambda-\lambda_0)}$$

oder aber

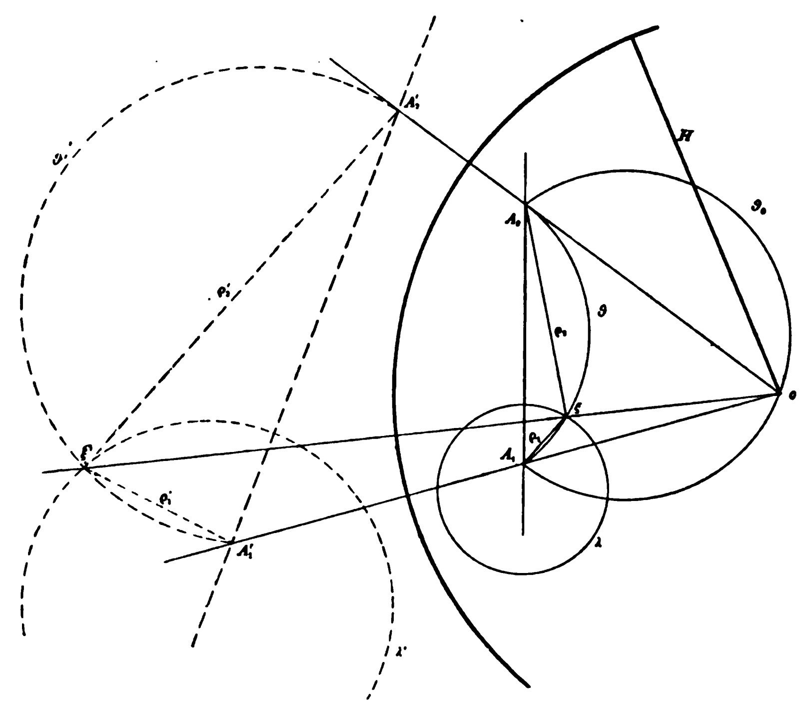
$$(1.) \qquad \lambda' = \lambda - \lambda_0.$$

Für die erste der Coordinaten λ', ϑ', φ' ist damit die gesuchte Darstellung gefunden.

Die zweite Coordinate ϑ' ist nun bekanntlich (vgl. (2.) S. 63) der Winkel, welcher eingeschlossen wird von den beiden durch ξ' und durch den unendlich fernen Punkt gehenden ϑ-Bogen des Bildsystems*). Denselben Winkel ϑ' werden nun wegen der Winkeltreue der Abbildung auch die conjungirten Elemente im ursprünglichen System einschliessen; das sind aber wieder zwei ϑ-Bogen dieses Systemes, und zwar diejenigen beiden, die durch die zu ξ' und zum unendlich fernen Punkt conjugirten Punkte,

*) Der letztere ϑ-Bogen ist nämlich nach dem Satze S. 66 nichts anderes als das Complement der Pollinie.

d. h. durch ξ und das Abbildungscentrum o hindurchgehen. Es ist also nach unserer obigen Bemerkung (6.) S. 65 $\cos\vartheta'$ als Cosinus des Winkels,



den die beiden durch ξ und o gehenden ϑ-Bogen mit einander bilden, gleich $\cos\gamma$,

(2.) $\cos\vartheta' = \cos\gamma$, d. i. $= \cos\vartheta\cos\vartheta_0 + \sin\vartheta\cdot\sin\vartheta_0\cos(\varphi-\varphi_0)$.

Da nun ϑ' nur zwischen 0 und π liegen kann, so ist durch diese Relation (2.) auch ϑ' selber, die zweite Coordinate, eindeutig bestimmt.

Um endlich auch φ' zu bestimmen, bemerken wir, dass zwischen den beiden dipolaren Coordinatensystemen vollständige Reciprocität stattfindet; wie wir das zweite System als das Bildsystem des ersten ansahen, so können wir auch umgekehrt das erste als das Bildsystem des zweiten betrachten. Aus dieser Auffassung ergiebt sich sofort die unserer letzten Gleichung entspechende Relation

$$(3.)\qquad \cos\vartheta = \cos\vartheta'\cdot\cos\vartheta_0'' + \sin\vartheta'\cdot\sin\vartheta_0''\cdot\cos(\varphi-\varphi_0''),$$

in welcher jetzt ϑ_0'' und φ_0'' die Coordinaten des Abbildungscentrums o, bezogen auf das dipolare Bildsystem, bedeuten.

Es handelt sich also zunächst darum, diese Coordinaten zu bestimmen. Zu diesem Zwecke lassen wir den Punkt ξ ins Unendliche rücken,

machen also nach (12.) S. 66 $\lambda = 0$ und $\vartheta = 0$; dann rückt der Bildpunkt ξ' in das Abbildungscentrum o und wir erhalten also für dessen Coordinaten im Bildsystem nach den Formeln (1.) und (2.) die Relationen:

$$\lambda_0'' = -\lambda_0, \qquad \cos\vartheta_0'' = \cos\vartheta_0,$$

und daraus folgt sofort, da die ϑ-Coordinate auf das Intervall 0 bis π beschränkt ist, $\vartheta_0'' = \vartheta_0$ und ferner $\psi_0'' = \psi_0$. — Wir gelangen somit zu folgendem Satze: ***Hülfssatz:** — Das Abbildungscentrum $o(\lambda_0, \vartheta_0, \varphi_0)$ besitzt in dem dipolaren Bildsystem die Coordinaten*

$$(4.) \qquad \lambda_0'' = -\lambda_0, \qquad \vartheta_0'' = \vartheta_0, \qquad \psi_0'' = \psi_0,$$

ein Satz, der sich auch rein geometrisch leicht beweisen lässt.

Hinsichtlich der dritten Coordinate φ_0'' bemerken wir noch, dass dieselbe augenscheinlich abhängt von der Wahl der Anfangsmeridianebene im Bildsystem und von dem Sinne, in welchem das Azimut φ' einer Bildmeridianebene wächst und abnimmt. Wir setzen nun hierüber zunächst fest, dass die Anfangsmeridianebene durch das Abbildungscentrum o hindurchgehe, sodass also $\varphi_0'' = 0$ ist.

Mit Rücksicht hierauf, sowie auf jenen Hülfssatz folgt dann aus unserer obigen Formel (3.):

$$\cos\vartheta = \cos\vartheta'\cos\vartheta_0 + \sin\vartheta\sin\vartheta_0\cos\varphi',$$

und diese Gleichung drückt $\cos\varphi'$ durch lauter bekannte Grössen aus, denn nach unseren früheren Ausführungen ist auch ϑ' als bekannt anzusehen. — Durch Auflösung ergiebt sich

$$\cos\varphi' = \frac{\cos\vartheta - \cos\vartheta'\cdot\cos\vartheta_0}{\sin\vartheta'\cdot\sin\vartheta_0}$$

oder, wenn wir noch für $\cos\vartheta'$ seinen Werth (2.) einsetzen:

$$(5.) \qquad \cos\varphi' = \frac{\cos\vartheta\cdot\sin\vartheta_0 - \sin\vartheta\cdot\cos\vartheta_0\cos(\varphi-\varphi_0)}{\sin\vartheta'}.$$

Um aber φ' selber eindeutig zu bestimmen, bedarf es ausser dieser Gleichung noch einer weiteren Festsetzung darüber, in welchem Quadranten φ' anzunehmen ist, oder aber, was dasselbe ist, über das Vorzeichen von $\sin\varphi'$. Nun folgt

$$\sin^2\varphi' = 1 - \cos^2\varphi' = \frac{\sin^2\vartheta\cdot\sin^2(\varphi-\varphi_0)}{\sin^2\vartheta'}.$$

Setzen wir also z. B. fest, dass $\sin\varphi'$ das Vorzeichen von $\sin(\varphi-\varphi_0)$ besitze, so ist damit jetzt auch die dritte Coordinate φ' eindeutig bestimmt,

unsere Aufgabe also gelöst. Das Resultat können wir folgendermassen zusammenfassen:

Es seien λ, ϑ, φ die dipolaren Coordinaten eines Punktes ξ und es sei ferner ξ' conjugirt zu ξ in Bezug auf eine um den Punkt $o(\lambda_0, \vartheta_0, \varphi_0)$ gelegte Kugelfläche. Ferner mögen λ', ϑ', φ' die Coordinaten von ξ' in dem dipolaren Bildsystem bezeichnen, d. h. in demjenigen dipolaren Coordinatensystem, dessen Pole denen des ursprünglichen Systems conjugirt sind. Dann finden zwischen den Coordinaten λ', ϑ', φ' und λ, ϑ, φ die folgenden Beziehungen statt:

$$\lambda' = \lambda - \lambda_0, \qquad \cos\vartheta' = \cos\vartheta\cdot\cos\vartheta_0 + \sin\vartheta\cdot\sin\vartheta_0\cos(\varphi-\varphi_0),$$

und auf Grund des hieraus sich ergebenden Werthes von $\vartheta'(0 < \vartheta' < \pi)$ erhält man dann weiter

$$\sin\varphi' = \frac{\sin\vartheta}{\sin\vartheta'}\sin(\varphi-\varphi_0), \quad \textit{und} \quad \cos\varphi' = \frac{\cos\vartheta\sin\vartheta_0 - \sin\vartheta\cos\vartheta_0\cos(\varphi-\varphi_0)}{\sin\vartheta'},$$

womit auch φ' eindeutig bestimmt ist. — Dabei ist vorausgesetzt, dass die Anfangsmeridianebene $\varphi' = 0$ durch das Abbildungscentrum o hindurchgehe).*

Wichtig für unsere weiteren Zwecke ist dann auch noch der Zusammenhang zwischen den *Constanten* der beiden Coordinatensysteme, zwischen der Poldistanz $(A_1A_2) = 2a$ des ursprünglichen Systemes und der Poldistanz $(A_1'A_2') = 2a'$ des Bildsystemes. — Es folgt aus ähnlichen Dreiecken

$$\frac{2a'}{2a} = \frac{(A_1'A_2')}{(A_1A_2)} = \frac{(oA_2')}{(oA_1)}$$

oder, da A_2' zu A_2 conjugirt ist, also $(oA_2') = \frac{H^2}{(oA_2)}$ ist,

$$\frac{2a'}{2a} = \frac{H^2}{(oA_1)(oA_2)} = \frac{H^2}{4a^2}\psi_0. \qquad \text{(vgl. (8.) S. 65).}$$

Wir erhalten also zu dem obigen Satze, welcher die Beziehungen zwischen unseren beiden dipolaren Coordinatensystemen angab, folgenden Zusatz.

---

*) Die entsprechende Aufgabe hat *C. Neumann* für die den dipolaren Coordinaten verwandten peripolaren Coordinaten behandelt, doch sind die Resultate dort nicht so einfach, wie hier. Vgl. den Aufsatz „Ueber die peripolaren Coordinaten" in den Abhandlungen der Kgl. Sächs. Gesellschaft der Wissenschaften, Bd. XX, 1880 daselbst § 4 und § 6.

Zusatz. — *Die Länge $2a'$ der Pollinie $(A'_1 A'_2)$ des dipolaren Bildsystems ist mit der Poldistanz $2a = (A_1 A_2)$ des ursprünglichen dipolaren Coordinatensystems durch folgende Relation verbunden:*

$$(6.)\qquad 2a' = \frac{H^2}{2a}\cdot\psi_0.$$

Hier bedeutet H den Radius der Abbildungskugel und ψ_0 die ψ-Coordinate ihres Mittelpunktes, des Abbildungscentrums o.

Beiläufiges. — Nunmehr sind wir auch in der Lage, die oben offen gelassene Frage zu beantworten, was aus den Conoidflächen durch Abbildung nach reciproken Radien entsteht. — Einer Conoidfläche $\vartheta' = \text{const.}$ oder $\cos\vartheta' = \text{const.}$ des dipolaren Bildsystemes entspricht in dem ursprünglichen dipolaren System eine Fläche

$$\cos\gamma = \text{const.} \quad \text{oder} \quad \gamma = \text{const.}$$

d. h. also eine Fläche, die aus lauter ϑ-Bogen gebildet wird, die mit dem durch o hindurchgehenden Bogen sämmtlich gleiche Winkel bilden. Es ist dies eine *Dupin*sche *Cyklide,* wegen ihrer Form auch *Horncyklide* genannt, eine Cyklide mit zwei reellen Doppelpunkten, oder strenger genommen nur ein Theil derselben, nämlich der von jenen beiden Doppelpunkten begrenzte Theil.

§ 7. Betrachtung eines Grenzfalles.

Die oben entwickelten allgemeinen Formeln für die Beziehungen eines dipolaren Coordinatensystems zu seinem Bildsystem versagen in einem Grenzfalle den Dienst, in dem Falle nämlich, dass das Abbildungscentrum o in einen der beiden Pole des dipolaren Systemes, z. B. in A_1 hineinfällt. Es rückt nämlich alsdann der Pol A'_1 des Bildsystemes ins Unendliche, das dipolare Bildsystem artet in ein monopolares System, d. h. in ein gewöhnliches Polarcoordinatensystem aus.

Es handle sich dann wieder darum, den Zusammenhang zwischen diesen beiden conjugirten Coordinatensystemen, dem dipolaren und dem monopolaren System zu bestimmen, oder genauer gesagt, um die folgende Frage: Wie drücken sich ϱ, ω, o, die Coordinaten eines Punktes ξ' im monopolaren Bildsystem durch die Coordinaten λ, ϑ, φ des conjugirten Punktes ξ im ursprünglich gegebenen dipolaren System aus?

Wir bezeichnen wieder die Polabstände (ξA_1) und (ξA_2) des Punktes

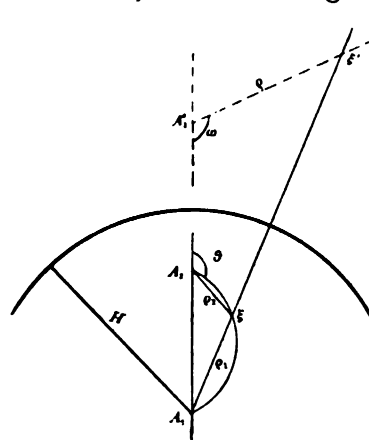
ξ mit ϱ_1 und ϱ_2; dann folgt sofort aus der Aehnlichkeit der Dreiecke $(A_1 A_2' \xi')$ und $(A_1 \xi A_2)$ die Relation:

$$\frac{\varrho}{(A_1 A_2')} = \frac{\varrho_2}{\varrho_1} = e^{\lambda} \qquad \text{oder} \qquad \varrho = \varrho_0 \cdot e^{\lambda},$$

wo

$$\varrho_0 = (A_1 A_2') = \frac{H^2}{(A_1 A_2)} = \frac{H^2}{2a}.$$

Sodann folgt aus der Figur, dass $\omega = \vartheta$ ist, denn es sind ω und ϑ die Winkel, welche je zwei conjugirte Elemente in beiden Systemen einschliessen; und endlich bemerken wir, dass die Meridianebenen bei Abbildung speciell von A_1 aus in sich selber übergeführt werden. Wir können also $o = \varphi$ setzen und gelangen somit zu dem folgenden Resultate:



Es mögen λ, ϑ, φ die dipolaren Coordinaten eines beliebigen Punktes ξ bezeichnen. Dann besitzt ξ', d. i. der Bildpunkt von ξ in Bezug auf eine um den Pol A_1 beschriebene Kugelfläche in dem conjugirten monopolaren System die Coordinaten

$$\varrho = \varrho_0 \cdot e^{\lambda}, \qquad \omega = \vartheta, \qquad o = \varphi.$$

Hier ist ϱ_0 eine Constante, die in einfacher Weise mit der Constanten des dipolaren Systems, d. i. mit der Poldistanz $(A_1 A_2) = 2a$ desselben zusammenhängt; es ist nämlich

$$\varrho_0 = \frac{H^2}{2a},$$

wenn H den Radius der Abbildungskugel bezeichnet.

Geometrisch besitzt übrigens ϱ_0 eine einfache Bedeutung, es ist nämlich die Entfernung des Abbildungscentrums A_1 von dem Anfangspunkte des monopolaren Coordinatensystems. — Zugleich sei bemerkt, dass A_1 auf der Axe $\omega = 0$ dieses Systemes liegt.

Zweiter Abschnitt.

Elektrostatische Probleme.

§ 1. Die Anwendung der Abbildung nach reciproken Radien auf die Probleme der Elektrostatik.

Die hervorragende Bedeutung der Abbildung nach reciproken Radiivectoren für die Potentialtheorie beruht vornehmlich auf dem folgenden bekannten und leicht zu beweisenden Satze*):

Es seien gegeben zwei Flächen σ und σ', welche durch Abbildung an einer um einen Punkt o mit dem Radius H beschriebenen Kugelfläche in einander übergehen. Diese Flächen seien derart mit Masse belegt, dass die Dichtigkeiten η und η' der auf zwei conjugirten Elementen $d\sigma$ und $d\sigma'$ vorhandenen Belegungen zu einander in der Beziehung stehen, dass

$$\eta = \frac{H^3}{r_\sigma^3}\eta' \tag{1.}$$

ist, wenn r_σ die Entfernung des Elementes $d\sigma$ vom Abbildungscentrum o bedeutet. — Sodann bezeichne V_ξ das Potential der materiellen Fläche σ in einem Punkte ξ und $V'_{\xi'}$ das Potential der Fläche σ' in dem conjugirten Punkte ξ'. Dann findet folgende Relation statt: Es ist

$$V_\xi = \frac{H}{r_\xi}V'_{\xi'}, \tag{2.}$$

wenn r_ξ den Abstand des Punktes ξ von o bedeutet. —

Lassen wir den Punkt ξ sich immer weiter und weiter von der Fläche σ entfernen, so wird sich das Potential V schliesslich so verhalten, als wäre die gesammte auf σ vorhandene Materie in einem einzigen in der Nähe befindlichen Punkte, z. B. im Abbildungscentrum concentrirt; es wird sich daher V_ξ dem Werthe $\frac{M}{r_\xi}$ nähern. — Gleichzeitig rückt nun aber der zu ξ conjugirte Punkt ξ' immer näher an das Abbildungscentrum o heran, und es nimmt daher schliesslich unsere obige Relation (2.) die Form an:

$$\frac{M}{r_\xi} = \frac{H}{r_\xi}\cdot V'_0 \qquad \text{oder} \qquad M = H\cdot V'_0.$$

*) Vgl. *Lipschitz*, dieses Journal Bd. 61. pg. 6—7.

Wir erhalten somit zu unserem obigen allgemeinen Satze den folgenden Zusatz:

Zusatz. — Halten wir an unseren obigen Festsetzungen fest, so ist die Gesammtmasse der auf σ vorhandenen Belegung:

$$M = H \cdot V_0', \tag{3.}$$

wo V_0' den Werth des Potentials V' im Abbildungscentrum o bedeutet. —

Speciell in der Elektrostatik handelt es sich nun vornehmlich immer um die beiden folgenden Probleme: erstlich die Vertheilung zu ermitteln, die eine bestimmte einem gegebenen *isolirten Conductor* mitgetheilte Elektricitätsmenge annimmt, wenn keine äusseren Kräfte einwirken (*Erstes elektrostatisches Fundamentalproblem*), und sodann die Vertheilung zu ermitteln, die auf dem *zur Erde abgeleiteten Conductor* entsteht, wenn ein äusserer elektrischer Massenpunkt m einwirkt (*Zweites elektrostatisches Fundamentalproblem*). — Auf diese beiden Fundamentalprobleme lassen sich alle übrigen die Vertheilung der Elektricität in einem Conductor betreffenden Probleme zurückführen. —

Bei dem ersten dieser Probleme handelt es sich darum, eine Belegung der Conductoroberfläche zu finden, deren Potential auf alle inneren Punkte constant ist, bei dem zweiten Fundamentalproblem eine solche, deren Potential auf innere Punkte gleich $-\frac{m}{r}$ ist, wenn r den Abstand von dem Massenpunkte m bedeutet. —

Der oben angegebene allgemeine Satz über die Potentiale der Belegungen zweier conjugirter Flächen löst nun die für viele Fälle sehr wichtige Aufgabe, die Lösung des zweiten elektrostatischen Fundamentalproblems für einen Conductor zurückzuführen auf die Lösung des ersten Fundamentalproblems für einen anderen Conductor.

Nehmen wir an, das erste Problem sei gelöst für den von der Fläche σ' begrenzten Conductor und zwar sei η' die Dichtigkeit speciell derjenigen Belegung von σ', deren Potential auf innere Punkte den constanten Werth $-\frac{m}{H}$ besitzt, so hat das Potential der nach (1.) correspondirenden Belegung η der conjugirten Fläche σ nach der Formel (2.) in inneren Punkten die Werthe $-\frac{m}{r}$, löst also für einen von σ begrenzt gedachten Conductor das zweite elektrostatische Fundamentalproblem.

Wir übertragen dieses Resultat noch auf den Fall mehrerer Conductoren und sprechen es folgendermassen aus:

Wir fassen ein System S' von n Conductoren $\mathfrak{K}'_1, \mathfrak{K}'_2, \ldots, \mathfrak{K}'_n$ ins Auge und denken uns diese sämmtlich bis zu dem nämlichen Potentialwerthe $-\frac{m}{H}$ geladen. Dann werden nach Eintritt des Gleichgewichtszustandes auf den Conductoroberflächen gewisse elektrische Belegungen vorhanden sein. Die Dichtigkeit der so z. B. auf dem Conductor $\mathfrak{K}'_h$ entstehenden Belegung in einem Oberflächenelemente $d\sigma'_h$ desselben bezeichnen wir mit η'_h und ferner ihr Potential in einem Punkte ξ' mit V'_h.

Wir fassen sodann noch ein zweites System S, wieder von n Conductoren $\mathfrak{K}_1, \mathfrak{K}_2, \ldots, \mathfrak{K}_n$, ins Auge, dessen Oberflächen aus denen des Systemes S' durch Abbildung nach reciproken Radien entstehen, und zwar durch Abbildung an einer mit dem Radius H um einen Punkt o beschriebenen Kugelfläche. — Denken wir uns alsdann die sämmtlichen Conductoren dieses Systemes S zur Erde abgeleitet, so wird die durch einen im Punkte o befindlichen elektrischen Massenpunkt m in diesem System inducirte elektrische Vertheilung folgendermassen bestimmt sein: Es wird die Dichtigkeit η_h der auf dem Conductor $\mathfrak{K}_h$ unter so bewandten Umständen entstehenden Belegung in dem jenem Elemente $d\sigma'_h$ conjugirten Elemente $d\sigma_h$ den Werth haben

$$\eta_h = \frac{H^3}{r_\sigma^3} \eta'_h, \tag{4.}$$

und ferner wird das Potential dieser Belegung in dem zu ξ' conjugirten Punkte ξ

$$V_h = \frac{H}{r_\xi} \cdot V'_h \tag{5.}$$

sein und endlich ergiebt sich für die Gesammtmasse der im Conductor $\mathfrak{K}_h$ inducirten Elektricität der Werth

$$M_h = H \cdot (V'_h)_0, \tag{6.}$$

wo der Index o andeuten soll, dass speciell der Werth des Potentials V'_h im Punkte o zu nehmen ist.

Dieser Satz führt also thatsächlich die Lösung des zweiten elektrostatischen Fundamentalproblems für das Conductorensystem S zurück auf die Lösung des ersten Problems für das conjugirte System S'.

§ 2. Die Masse der einem äusseren Punkte entsprechenden Greenschen Belegung.

Wir wollen noch einige Betrachtungen an die Formel (6.) des vorigen Paragraphen anknüpfen, uns dabei aber auf den Specialfall $n = 1$, auf den Fall eines einzigen Conductors $\mathfrak{K}$, und eines Bildconductors $\mathfrak{K}'$ beschränken.

Nach jener Formel ist die Masse der auf $\mathfrak{K}$ von m inducirten Belegung

$$M = H \cdot V'_0 = -m \cdot \left(\frac{V'_0}{-\frac{m}{H}} \right), \tag{1.}$$

und hier bedeutet also V'_0 das Potential des bis zur Spannung $-\frac{m}{H}$ geladenen Conductors $\mathfrak{K}'$ im Punkte $o(m)$. Es ist sonach $\dfrac{V'_0}{-\frac{m}{H}}$ der Quotient zweier Werthe, die das Potential ein und derselben Gleichgewichtsvertheilung an verschiedenen Stellen besitzt. Dieser Quotient ist aber bekanntlich unabhängig von der speciellen gerade vorliegenden Ladung des Conductors, also ist

$$\frac{V'_0}{-\frac{m}{H}} = \frac{U'_0}{C'}$$

wenn U' das Potential einer ganz *beliebigen* auf $\mathfrak{K}'$ im Gleichgewichte befindlichen Elektricitätsmenge, und U'_0 und C' die Werthe von U' im Punkte o, bezw. im Innern von $\mathfrak{K}'$ bedeuten. — Es folgt also für M der Ausdruck

$$M = -m \cdot \frac{U'_0}{C'} \cdot \tag{2.}$$

Setzen wir nun speciell $m = -1$, so stellt bekanntlich die betrachtete elektrische Vertheilung auf dem Conductor $\mathfrak{K}$ die dem Punkte o entsprechende *Green*sche Belegung der Conductoroberfläche σ dar, deren Dichtigkeit g^o die Eigenschaft besitzt, dass sich der in o vorhandene Werth Ω_0 des Potentials Ω einer ganz beliebigen auf σ ausgebreiteten Massenbelegung folgendermassen darstellen lässt:

$$\Omega_0 = \int \Omega_\sigma \cdot g^o_\sigma \, d\sigma, \tag{3.}$$

wenn wir unter Ω_σ die Werthe jenes Potentials Ω auf der Fläche σ verstehen. —

Hinsichtlich der Gesammtmasse dieser *Green*schen Belegung gelangen wir also zu folgendem Resultate:

Satz. I. — *Die Masse der einem äusseren Punkte o entsprechenden Greenschen Belegung einer Fläche σ besitzt den Werth:*

$$M^0 = \frac{U'_0}{C'},$$

wo über die Bedeutung von U'_0 und C' Folgendes zu bemerken ist: Man denke sich die aus σ durch Abbildung nach reciproken Radien von o aus entstehende Fläche σ' als die Oberfläche eines isolirten Conductors $\mathfrak{K}'$ und denke sich denselben, ohne dass äussere Kräfte einwirkten, elektrisch geladen bis zur Spannung C'. Alsdann stellt U'_0 den Werth des Potentials der entstehenden Gleichgewichtsvertheilung im Punkte o dar. —

Weit bekannter als der soeben angegebene Ausdruck für die Masse der *Green*schen Belegung ist ein anderer Ausdruck für dieselbe Grösse, zu dem man leicht ausgehend von der Formel (3.) gelangt.

Fassen wir nämlich das Potential U des ohne Einwirkung äusserer Kräfte bis zur Spannung C geladenen Conductors $\mathfrak{K}$ ins Auge, so ist nach jener Formel (3.) der Werth U_0 von U im Punkte o folgendermassen darstellbar:

$$U_0 = \int C \cdot g^0_\sigma \, d\sigma = C \int g^0_\sigma d\sigma \quad \text{d. i.} \quad U_0 = C \cdot M^0,$$

und daraus ergiebt sich der folgende Satz*):

Satz II. — *Die Masse der einem äusseren Punkte o entsprechenden Greenschen Belegung einer Fläche σ besitzt den Werth*

$$M^0 = \frac{U_0}{C},$$

wo über die Bedeutung von U_0 und C das Folgende zu bemerken ist: Man denke sich die Fläche σ als die Oberfläche eines isolirten Conductors und diesen, ohne dass äussere Kräfte einwirkten, elektrisch geladen bis zu dem Potentialwerthe C. Alsdann stellt U_0 den im Punkte o vorhandenen Werth des Potentials der entstehenden Gleichgewichtsvertheilung dar.

In diesem Satze II wird also das erste Fundamentalproblem für den Conductor $\mathfrak{K}$ selber als gelöst vorausgesetzt, während der oben an-

*) Vgl. *C. Neumanns* „Untersuchungen über das logarithmische und *Newton*sche Potential" (Leipzig bei Teubner 1877) pg. 341 Formel 9.

geführte Satz I die Lösung dieses ersten Problems nur für den zu $\mathfrak{K}$ conjugirten Conductor $\mathfrak{K}'$ voraussetzt. Es wird also durch jenen Satz I eine grössere Einheitlichkeit in der Darstellung erreicht; denn behandelt man das zweite Fundamentalproblem für einen Conductor $\mathfrak{K}$ nach der Methode der reciproken Radien, so bedarf man der Lösung des ersten Fundamentalproblems für den conjugirten Conductor $\mathfrak{K}'$ ja schon ohnehin zur Bestimmung der Dichtigkeit und des Potentials (vgl. den Satz S. 85).

Durch Vergleichung der beiden auf verschiedenen Wegen abgeleiteten und in den Sätzen I und II ausgesprochenen Resultate gelangt man übrigens zu einem beachtenswerthen Satze. — Es ergiebt sich ohne weiteres die Formel

$$\frac{U_0}{C} = \frac{U'_0}{C'},$$

die sich sofort noch weiter vereinfacht, wenn wir $C' = C$ machen. Das Resultat können wir so aussprechen:

Es sei ein beliebiger Conductor $\mathfrak{K}$, ohne dass äussere Kräfte influiren, elektrisch geladen bis zur Spannung C. Den Werth, den das Potential der alsdann eintretenden Gleichgewichtsvertheilung in einem beliebig gewählten Punkte o besitzt, bezeichne man mit U_0. — Denkt man sich alsdann einen Conductor $\mathfrak{K}'$, der zu $\mathfrak{K}$ conjugirt ist in Bezug auf eine beliebige um o als Centrum beschriebene Kugelfläche, ebenfalls geladen bis zur inneren Spannung C, so wird das Potential der auf $\mathfrak{K}'$ entstehenden Belegung im Punkte o den nämlichen Werth U_0 besitzen.

In dem Specialfalle, dass der Conductor $\mathfrak{K}$ eine Kugel ist, lässt sich die Richtigkeit dieses Satzes leicht auch direct nachweisen.

§ 3. Ein dem Poissonschen verwandtes Problem der Elektrostatik.

Wir wollen jetzt zu *speciellen Anwendungen* der in § 1 des gegenwärtigen Abschnittes angegebenen Sätze übergehen, und zwar wollen wir zunächst eine solche Anwendung machen auf ein Problem der Elektricitätsvertheilung auf zwei Kugeln. — Dabei werden uns die im ersten Abschnitte abgeleiteten Sätze über dipolare Coordinaten wesentliche Dienste leisten.

Bereits *Poisson* hat (in den Memoiren der Pariser Akademie von 1812 und 1813) eine Lösung des bekannten, seinen Namen tragenden Problems gegeben, die Vertheilung der Elektricität auf zwei leitenden Kugeln zu

bestimmen. Er setzte dabei jedoch voraus, dass die den Kugeln mitgetheilten elektrischen Ladungen sich selbst überlassen seien, dass keine äusseren elektrischen Kräfte die Vertheilung beeinflussten. — Wir werden also in unserer obigen Ausdrucksweise das *Poisson*sche Problem zu bezeichnen haben als das erste Fundamentalproblem für zwei Kugeln.

C. Neumann brachte nun bei Behandlung dieses selben Problems die oben eingeführten dipolaren Coordinaten zur Anwendung und gelangte so zu der folgenden einfachen

Lösung des Poissonschen Problems. — *Man denke sich die beiden Conductorkugeln einem dipolaren System (Poldistanz $2a$) als λ-Kugeln mit den Parametern λ_1 und λ_2 ($\lambda_1 > 0 > \lambda_2$)*) angehörend. Sie seien isolirt und elektrisch geladen bis zu den constanten Potentialwerthen C_1 und C_2. — Die hierzu erforderlichen elektrischen Ladungen haben alsdann die folgenden Werthe:*

$$(1.)\qquad M_1 = 2a\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_1^{(n)}e^{-N\lambda_1} \quad \text{und} \quad M_2 = 2a\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_2^{(n)}e^{N\lambda_2}.$$

Ferner sind die Dichtigkeiten $D_1(\lambda_1, \vartheta_1, \varphi_1)$ und $D_2(\lambda_2, \vartheta_2, \varphi_2)$ der nach Eintritt des Gleichgewichtszustandes auf den Kugeloberflächen vorhandenen elektrischen Belegungen:

$$(2.)\quad D_1 = \frac{\psi_1^{\frac{3}{2}}}{4\pi a}\sum_{n=0}^{\infty}N\alpha_1^{(n)}P_n(\cos\vartheta_1), \qquad D_2 = \frac{\psi_2^{\frac{3}{2}}}{4\pi a}\sum_{n=0}^{\infty}N\alpha_2^{(n)}P_n(\cos\vartheta_2),$$

und endlich besitzen die Potentiale U_1 und U_2 dieser beiden Kugelbelegungen in einem äusseren Punkte ($\lambda, \vartheta, \varphi; \psi$) die folgenden Werthe:

$$(3.)\quad U_1 = \psi^{\frac{1}{2}}\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_1^{(n)}e^{N(\lambda-\lambda_1)}P_n(\cos\vartheta), \qquad U_2 = \psi^{\frac{1}{2}}\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_2^{(n)}e^{N(\lambda_2-\lambda)}P_n(\cos\vartheta).$$

Hier stehen alsdann die Entwicklungscoefficienten $\alpha^{(n)}$ in den folgenden Bedeutungen:

$$(4.)\qquad \alpha_1^{(n)} = \frac{C_1e^{-N\lambda_2} - C_2e^{N\lambda_2}}{e^{N\delta}-e^{-N\delta}}, \qquad \alpha_2^{(n)} = \frac{-C_1e^{-N\lambda_1} + C_2e^{N\lambda_1}}{e^{N\delta}-e^{-N\delta}},$$

wo δ für $\lambda_1-\lambda_2$ und N, wie auch oben, für $n+\frac{1}{2}$ steht.

Doch die Anwendung der dipolaren Coordinaten auf die Theorie der Elektricitätsvertheilung führte *C. Neumann* noch weiter zur Lösung eines neuen Problems, nämlich des *zweiten Fundamentalproblems für zwei Kugeln.*

Dieses nämliche Problem wollen wir nun auch hier behandeln, frei-

*) Ein verschiedenes Vorzeichen müssen die Parameter λ_1 und λ_2 besitzen, da andernfalls die beiden Kugelflächen nicht neben einander lägen, sondern die eine innerhalb der anderen.

lich nach einer ganz anderen Methode, nämlich als ein einfaches Beispiel für die auch späterhin öfters anzuwendende *Methode der reciproken Radien unter gleichzeitiger Benutzung der dipolaren Coordinaten.* — Als wesentlich sei sogleich hervorgehoben, dass wir bei dieser Methode das eigentlich *Poisson*sche Problem als gelöst voraussetzen, und zwar werden wir die Lösung speciell in der oben angegebenen von *C. Neumann* herrührenden Form annehmen.

Wir verfahren nach den in § 1 gemachten Angaben folgendermassen: Wir bilden die Kugeloberflächen (λ_1 und λ_2) vom inducirenden Pole, vom Massenpunkt $m(\lambda_m, \vartheta_m, \varphi_m)$ aus nach reciproken Radien ab und denken uns die so erhaltenen beiden Kugelflächen wieder als die Oberflächen zweier auxiliären Conductorkugeln. Dieselben gehören einem dipolaren System, dem Bildsystem (Poldistanz $(A_1' A_2') = 2a'$) als λ-Kugeln mit den Parametern $\lambda_1 - \lambda_m$ und $\lambda_2 - \lambda_m$ an; denken wir sie uns also beide elektrisch geladen bis zu dem Potentialwerthe $-\frac{m}{H}$, (d. h. machen wir $C_1 = C_2 = -\frac{m}{H}$), so sind die Dichtigkeiten D_1' und D_2' der entstehenden elektrischen Oberflächenbelegungen nach der obigen Lösung des *Poisson*schen Problems (vgl. die Formeln (2.)) in den Oberflächenelementen $d\sigma_1'(\vartheta_1', \varphi_1')$ der einen und $d\sigma_2'(\vartheta_2', \varphi_2')$ der anderen auxiliären Kugel

$$(5.)\quad D_1' = \frac{\psi_1'^{\frac{3}{2}}}{4\pi a'} \sum_{n=0}^{\infty} N\left(-\frac{m}{H}\beta_1^{(n)}\right) P_n(\cos\vartheta_1'),\quad D_2' = \frac{\psi_2'^{\frac{3}{2}}}{4\pi a'} \sum_{n=0}^{\infty} N\left(-\frac{m}{H}\beta_2^{(n)}\right) P_n(\cos\vartheta_2'),$$

oder, wenn wir anstatt der Coordinaten von $d\sigma_1'$ und $d\sigma_2'$ diejenigen der conjugirten Elemente $d\sigma_1$ und $d\sigma_2$ der ursprünglich gegebenen Kugelflächen (λ_1 und λ_2) einführen, also allgemein,

$$\lambda' = \lambda - \lambda_m,\quad \cos\vartheta' = \cos\gamma \quad \text{d. i.} \quad = \cos\vartheta \cdot \cos\vartheta_m + \sin\vartheta \sin\vartheta_m \cos(\varphi - \varphi_m)$$

und daher

$$\psi' = e^{\lambda - \lambda_m} + e^{\lambda_m - \lambda} - 2\cos\gamma = r^2 \cdot \frac{\psi \cdot \psi_m}{(2a)^2} \qquad \text{(vgl. (5.) S. 65)}$$

setzen, wo r den Abstand des Punktes $(\lambda, \vartheta, \varphi; \psi)$ von m bedeutet:

$$(6.)\quad \begin{cases} D_1' = \dfrac{1}{4\pi a'} \cdot r_1^3 \cdot \dfrac{\psi_1^{\frac{3}{2}} \cdot \psi_m^{\frac{3}{2}}}{(2a)^3} \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} N\left(-\frac{m}{H}\beta_1^{(n)}\right) P_n(\cos\gamma_1), \\ D_2' = \dfrac{1}{4\pi a'} \cdot r_2^3 \cdot \dfrac{\psi_2^{\frac{3}{2}} \cdot \psi_m^{\frac{3}{2}}}{(2a)^3} \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} N\left(-\frac{m}{H}\beta_2^{(n)}\right) P_n(\cos\gamma_2). \end{cases}$$

Hier haben dann die Entwicklungscoefficienten $-\frac{m}{H}\beta_1^{(n)}$ und $-\frac{m}{H}\beta_2^{(n)}$

die folgenden Werthe. Es ist (vgl. die Formeln (4)):

$$(7.)\quad \begin{cases} -\frac{m}{H}\beta_1^{(n)} = -\frac{m}{H}\cdot\frac{e^{N(\lambda_m-\lambda_2)}-e^{N(\lambda_2-\lambda_m)}}{e^{N\delta}-e^{-N\delta}}, \\ -\frac{m}{H}\beta_2^{(n)} = -\frac{m}{H}\cdot\frac{-e^{N(\lambda_m-\lambda_1)}+e^{N(\lambda_1-\lambda_m)}}{e^{N\delta}-e^{-N\delta}}. \end{cases} \qquad (\delta=\lambda_1-\lambda_2)$$

Nach unserem Satze S. 85 stehen nun die Dichtigkeiten $\mathfrak{D}_1$ und $\mathfrak{D}_2$ der auf den Kugeln (λ_1) und (λ_2) inducirten elektrischen Oberflächenbelegungen zu diesen Dichtigkeiten D'_1 und D'_2 in einfacher Beziehung, es ist

$$\mathfrak{D}_1 = \frac{H^3}{r_1^3}D'_1, \qquad \mathfrak{D}_2 = \frac{H^3}{r_2^3}D'_2.$$

Setzen wir nun hier für D'_1 und D'_2 die Werthe (6.), so folgt also

$$\mathfrak{D}_1 = -m\cdot\frac{1}{2\pi}\cdot\frac{H^2}{2a'}\cdot\frac{\psi_1^{\frac{3}{2}}\cdot\psi_m^{\frac{3}{2}}}{(2a)^3}\sum_{n=0}^{\infty}N\beta_1^{(n)}P_n(\cos\gamma_1),$$

$$\mathfrak{D}_2 = -m\cdot\frac{1}{2\pi}\cdot\frac{H^2}{2a'}\cdot\frac{\psi_2^{\frac{3}{2}}\cdot\psi_m^{\frac{3}{2}}}{(2a)^3}\sum_{n=0}^{\infty}N\beta_2^{(n)}P_n(\cos\gamma_2).$$

Es bleibt hier nur noch übrig auch noch die letzten auxiliären Grössen H und $2a'$ zu eliminiren. Dies geschieht nach (6.) S. 81 leicht, indem wir $\frac{H^2}{2a'}=\frac{2a}{\psi_m}$ setzen. Dann haben wir die Dichtigkeiten $\mathfrak{D}_1$ und $\mathfrak{D}_2$ der gesuchten inducirten Belegungen durch lauter auf das ursprünglich gegebene dipolare System bezügliche Grössen ausgedrückt.

Um nun auch die *Potentiale* U_1 und U_2 dieser Belegungen in einem äusseren Punkte $\xi(\lambda, \vartheta, \varphi; \psi)$ zu berechnen, bestimmen wir zunächst die Potentiale der auf den auxiliären Conductorkugeln vorhandenen Belegungen in dem conjugirten Punkte $\xi'(\lambda', \vartheta', \varphi'; \psi')$. Dieselben sind zufolge (3.)

$$(8.)\quad \begin{cases} U'_1 = \psi'^{\frac{1}{2}}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{m}{H}\beta_1^{(n)}\right)e^{N(\lambda'-\lambda'_1)}P_n(\cos\vartheta'), \\ U'_2 = \psi'^{\frac{1}{2}}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{m}{H}\beta_2^{(n)}\right)e^{N(\lambda'_2-\lambda')}P_n(\cos\vartheta') \end{cases}$$

oder, da $\lambda'=\lambda-\lambda_m$, $\cos\vartheta'=\cos\gamma$ und $\psi'=r^2\cdot\frac{\psi\cdot\psi_m}{(2a)^2}$ ist,

$$U'_1 = r\cdot\frac{\psi_1^{\frac{1}{2}}\cdot\psi_m^{\frac{1}{2}}}{2a}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{m}{H}\beta_1^{(n)}\right)e^{N(\lambda-\lambda_1)}P_n(\cos\gamma),$$

$$U'_2 = r\cdot\frac{\psi_2^{\frac{1}{2}}\psi_m^{\frac{1}{2}}}{2a}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{m}{H}\beta_2^{(n)}\right)e^{N(\lambda_2-\lambda)}P_n(\cos\gamma).$$

Da nun die gesuchten Potentiale $\mathfrak{U}_1$ und $\mathfrak{U}_2$ nach (5.) S. 85 zu diesen Potentialen U'_1 und U'_2 in der Beziehung stehen, dass

$$\mathfrak{U}_1 = \frac{H}{r}U'_1 \qquad \text{und} \qquad \mathfrak{U}_2 = \frac{H}{r}U'_2$$

ist, so ergeben sich für $\mathfrak{U}_1$ und $\mathfrak{U}_2$ die folgenden Ausdrücke:

$$\mathfrak{U}_1 = -m\frac{\psi_m^{\frac{1}{2}}}{2a}\cdot\psi^{\frac{1}{2}}\sum_{n=0}^{\infty}\beta_1^{(n)}e^{N(\lambda-\lambda_1)}P_n(\cos\gamma),\quad \mathfrak{U}_2 = -m\frac{\psi_m^{\frac{1}{2}}}{2a}\psi^{\frac{1}{2}}\sum_{n=0}^{\infty}\beta_2^{(n)}e^{N(\lambda_2-\lambda)}P_n(\cos\gamma).$$

Die *Gesammtmassen* $\mathfrak{M}_1$ und $\mathfrak{M}_2$ der inducirten Belegungen endlich sind zufolge (6.) S. 85:

$$\mathfrak{M}_1 = H(U_1')_m,\qquad \mathfrak{M}_2 = H(U_2')_m$$

oder nach (8.), da die ϑ- und ψ-Coordinate des Abbildungscentrums m im Bildsystem dieselben Werthe ϑ_m und ψ_m, wie im ursprünglichen System haben, die λ-Coordinaten dagegen den entgegengesetzten, also den Werth $-\lambda_m$ (vgl. den Hülfssatz S. 79):

$$\mathfrak{M}_1 = H\cdot\psi_m^{\frac{1}{2}}\sum_{n=0}^{\infty}\Big(-\frac{m}{H}\beta_1^{(n)}\Big)e^{-N\lambda_1}P_n(\cos\vartheta_m),\quad \mathfrak{M}_2 = H\cdot\psi_m^{\frac{1}{2}}\sum_{n=0}^{\infty}\Big(-\frac{m}{H}\beta_2^{(n)}\Big)e^{N\lambda_2}P_n(\cos\vartheta_m).$$

Wir können also unsere Resultate jetzt folgendermassen zusammenfassen:

Lösung des zweiten elektrostatischen Fundamentalproblems für zwei Kugeln. — *Es seien gegeben zwei zur Erde abgeleitete Metallkugeln, deren Oberflächen einem dipolaren System (Poldistanz $2a$) als λ-Kugelflächen mit den Parametern λ_1 und λ_2 ($\lambda_1 > 0 > \lambda_2$) angehören mögen. Auf sie wirke von aussenher ein fester elektrischer Massenpunkt $m(\lambda_m, \vartheta_m, \varphi_m; \psi_m)$ ein. Alsdann werden durch denselben in den beiden Kugeln die Elektricitätsmengen*

$$(9.)\quad \mathfrak{M}_1 = -m\,\psi_m^{\frac{1}{2}}\sum_{n=0}^{\infty}\beta_1^{(n)}e^{-N\lambda_1}P_n(\cos\vartheta_m),\qquad \mathfrak{M}_2 = -m\,\psi_m^{\frac{1}{2}}\sum_{n=0}^{\infty}\beta_2^{(n)}e^{N\lambda_2}P_n(\cos\vartheta_m)$$

inducirt, und zwar in Form von Oberflächenbelegungen. — Die Dichtigkeiten $\mathfrak{D}_1$ und $\mathfrak{D}_2$ dieser Belegungen in Elementen $d\sigma_1$ und $d\sigma_2$ der einen bezw. der anderen Kugeloberfläche werden alsdann die Werthe haben:

$$(10.)\ \mathfrak{D}_1 = -m\frac{\psi_m^{\frac{1}{2}}}{8\pi a^2}\psi_1^{\frac{3}{2}}\sum_{n=0}^{\infty}N\beta_1^{(n)}P_n(\cos\gamma_1),\qquad \mathfrak{D}_2 = -m\frac{\psi_m^{\frac{1}{2}}}{8\pi a^2}\psi_2^{\frac{3}{2}}\sum_{n=0}^{\infty}N\beta_2^{(n)}P_n(\cos\gamma_2).$$

Zugleich werden die Potentiale dieser inducirten Belegungen in einem äusseren Punkte $(\lambda, \vartheta, \varphi; \psi)$ dargestellt sein durch folgende Reihen:

$$(11.)\qquad \begin{cases} \mathfrak{U}_1 = -m\dfrac{\psi_m^{\frac{1}{2}}}{2a}\psi^{\frac{1}{2}}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\beta_1^{(n)}e^{N(\lambda-\lambda_1)}P_n(\cos\gamma),\\[2ex] \mathfrak{U}_2 = -m\dfrac{\psi_m^{\frac{1}{2}}}{2a}\psi^{\frac{1}{2}}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\beta_2^{(n)}e^{N(\lambda_2-\lambda)}P_n(\cos\gamma).\end{cases}$$

Hier steht zur Abkürzung $\cos\gamma$ *für* $\cos\vartheta\cdot\cos\vartheta_m+\sin\vartheta\cdot\sin\vartheta_m\cdot\cos(\varphi-\varphi_m)$ *und* N *für* $n+\frac{1}{2}$; *und ferner haben die Coefficienten* $\beta^{(n)}$ *die aus* (7.) *ersichtlichen Bedeutungen.*

Dieses Resultat stimmt genau mit dem von *C. Neumann* auf ganz anderem Wege, nach der Methode der unbestimmten Kugelfunctionen, abgeleiteten überein (Vgl. den Anhang zu den „Hydrodynamischen Untersuchungen" (Leipzig b. Teubner 1883) S. 271).

§ 4. Eine singuläre Niveaufläche.

Nach Absolvirung der beiden elektrostatischen Fundamentalprobleme für zwei Kugeln, erledigen sich auch alle übrigen, die Vertheilung der Elektricität auf zwei Kugeln betreffenden Aufgaben in überaus einfacher Weise.

Denken wir uns z. B. die beiden Kugeln isolirt, elektrisch geladen und gleichzeitig der Wirkung eines äusseren elektrischen Massenpunktes ausgesetzt, so ergiebt sich durch Superposition hinsichtlich der entstehenden Vertheilung das folgende Resultat:

Bezeichnen C_1 *und* C_2 *die nach Eintritt des elektrostatischen Gleichgewichtszustandes in den beiden Kugeln herrschenden Potentialwerthe, so werden die zur Ladung erforderlichen Elektricitätsmengen* M, *und ferner die Dichtigkeiten* η *und die Potentiale* V *der entstehenden Oberflächenbelegungen, dargestellt sein durch die folgenden Formeln:*

$$(1.)\qquad \mathsf{M}_1 = M_1+\mathfrak{M}_1,\qquad \mathsf{M}_2 = M_2+\mathfrak{M}_2,$$

$$(2.)\qquad \eta_1 = D_1+\mathfrak{D}_1,\qquad \eta_2 = D_2+\mathfrak{D}_2,$$

$$(3.)\qquad V_1 = U_1+\mathfrak{U}_1,\qquad V_2 = U_2+\mathfrak{U}_2,$$

wo die Grössen M, D, U *und* $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{U}$ *die in den Formeln* (1.), (2.), (3.) *und* (9.), (10.), (11.) *des vorigen Paragraphen angegebenen Bedeutungen haben.*

Dieses Resultat wollen wir nun in der Weise specialisiren, dass wir den äusseren Massenpunkt m speciell in die Chordalebene der beiden Conductorkugelflächen verlegen, oder, was dasselbe ist, in das Centrum c einer die Conductorkugeln orthogonal schneidenden Kugelfläche, einer Orthogonalkugelfläche (vgl. Abschn. I § 2). — Die Chordalebene gehört nun dem System der λ-Kugelflächen mit dem Parameter $\lambda=0$ an, sodass also jetzt der Massenpunkt m die Coordinaten $\lambda_m=0$, $\vartheta_m=\vartheta_c$ und $\varphi_m=\varphi_c$ besitzt.

Gleichzeitig wollen wir noch die weitere Specialisirung eintreten lassen, dass wir uns beide Kugeln bis zu demselben Potentialwerthe C geladen denken; wir machen also $C_1 = C_2 = C$. Dann nehmen die Entwicklungscoefffcienten $\alpha^{(n)}$ und $\beta^{(n)}$ des vorigen Paragraphen (vgl. daselbst die Formeln (4.) und (7.)) die folgenden specielleren Werthe an. Es wird

$$\alpha_1^{(n)} = C \cdot k_1^{(n)}, \qquad \alpha_2^{(n)} = C \cdot k_2^{(n)},$$
$$\beta_1^{(n)} = k_1^{(n)}, \qquad \beta_2^{(n)} = k_2^{(n)},$$

wo $k_1^{(n)}$ und $k_2^{(n)}$ die folgenden Bedeutungen haben:

$$(4.) \qquad k_1^{(n)} = \frac{e^{-N\lambda_2} - e^{N\lambda_2}}{e^{N\delta} - e^{-N\delta}}, \qquad k_2^{(n)} = \frac{-e^{-N\lambda_1} + e^{N\lambda_1}}{e^{N\delta} - e^{-N\delta}}.$$

Berücksichtigen wir ferner, dass $\frac{2a}{\sqrt{\psi_m}} = \frac{2a}{\sqrt{\psi_c}} = \varrho$ ist, d. h. gleich dem Radius der um c gelegten Orthogonalkugel, so können wir die Formeln (3.) explicite folgendermassen schreiben:

$$V_1 = \psi^{\frac{1}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} k_1^{(n)} e^{N(\lambda-\lambda_1)} \Big(C \cdot P_n(\cos\vartheta) - \frac{m}{\varrho} P_n(\cos\gamma) \Big),$$
$$V_2 = \psi^{\frac{1}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} k_2^{(n)} e^{N(\lambda_2-\lambda)} \Big(C \cdot P_n(\cos\vartheta) - \frac{m}{\varrho} P_n(\cos\gamma) \Big).$$

Zu diesen Potentialen V_1 und V_2 der beiden Kugelbelegungen tritt nun noch das Potential $\frac{m}{r}$ des Massenpunktes m, sodass das Gesammtpotential des vorgelegten elektrischen Systems $\Omega = \frac{m}{r} + V_1 + V_2$ oder

$$(5.) \qquad \Omega = \frac{m}{r} + \psi^{\frac{1}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \left(k_1^{(n)} e^{N(\lambda-\lambda_1)} + k_2^{(n)} e^{N(\lambda_2-\lambda)}\right) \Big(C \cdot P_n(\cos\vartheta) - \frac{m}{\varrho} P_n(\cos\gamma) \Big)$$

ist, wo r den Abstand des sollicitirten Punktes $(\lambda, \vartheta, \varphi; \psi)$ vom Punkte c (m) bedeutet.

Wir wollen nun die Werthe dieses Potentials Ω speciell auf der um c beschriebenen Orthogonalkugelfläche untersuchen, deren Gleichung $r = \varrho$ ist, oder in dipolaren Coordinaten nach Abschn. I § 2:

$$\cos\vartheta = \cos\gamma \quad \text{d. i.} = \cos\vartheta\cos\vartheta_c + \sin\vartheta\sin\vartheta_c\cos(\varphi - \varphi_c).$$

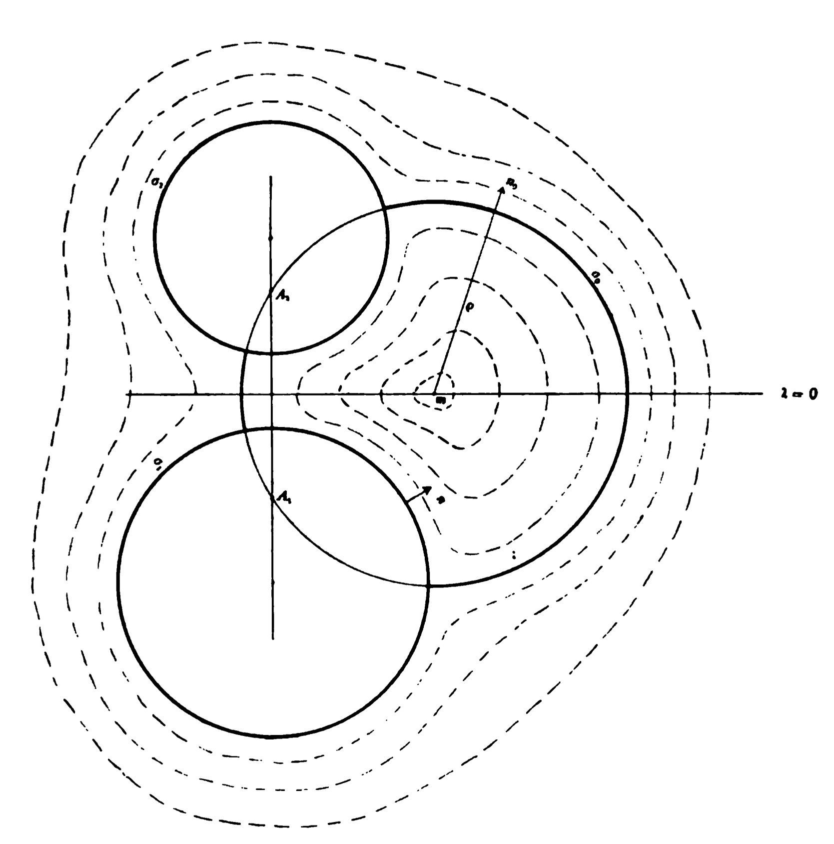
Die Werthe von Ω speciell auf dieser Fläche, — wie das der untere Index o andeuten soll — sind also:

$$\Omega_0 = \frac{m}{\varrho} + \Big(C - \frac{m}{\varrho}\Big) \psi^{\frac{1}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \left(k_1^{(n)} e^{N(\lambda-\lambda_1)} + k_2^{(n)} e^{N(\lambda_2-\lambda)}\right) P_n(\cos\vartheta).$$

Verfügen wir also noch über den in beiden Conductorkugeln herrschenden Potentialwerth C in bestimmter Weise, und setzen $C = \frac{m}{\varrho}$, so folgt

$$\Omega_0 = \frac{m}{\varrho} = C,$$

d. h. es herrscht also auf dieser die Conductorkugeln orthogonal schneidenden Kugelfläche derselbe constante Potentialwerth wie auf den Con-



ductorkugeln selber. Diese drei Kugelflächen zusammen bilden demnach eine einzige (verzweigte) Niveaufläche.

Wir sind also zu folgendem bemerkenswerthen Resultate gelangt:

Es seien gegeben zwei isolirte Metallkugeln (λ_1 und λ_2). Auf dieselben wirke von aussenher ein elektrischer Massenpunkt m ein, der sich im Centrum $c(\lambda_c = 0, \vartheta_c, \varphi_c)$ *einer, jene Kugeln orthogonal schneidenden Kugelfläche befinde.*

Alsdann ist es stets möglich, die beiden Conductorkugeln derart elektrisch zu laden, dass auf jener um c beschriebenen Orthogonalkugelfläche derselbe constante Potentialwerth herrscht, wie auf den Conductorkugeln selber, d. h. dass diese drei Kugelflächen (die beiden Conductorkugelflächen und jene Orthogonalkugelfläche) zusammen eine einzige Niveaufläche bilden.

Die hierzu erforderlichen elektrischen Ladungen der beiden Kugeln sind nach (1.)

$$(6.)\qquad \begin{cases} \mathsf{M}_1 = 2a\dfrac{m}{\varrho}\sum\limits_{n=0}^{\infty} k_1^{(n)} e^{-N\lambda_1}(1-P_n(\cos\vartheta_c)), \\ \mathsf{M}_2 = 2a\dfrac{m}{\varrho}\sum\limits_{n=0}^{\infty} k_2^{(n)} e^{N\lambda_2}(1-P_n(\cos\vartheta_c)). \end{cases}$$

Ferner sind nach (2.) *die Dichtigkeiten* $\eta_1(\lambda_1, \vartheta_1, \varphi_1)$ *und* $\eta_2(\lambda_2, \vartheta_2, \varphi_2)$ *der Oberflächenbelegungen, als welche sich diese Ladungen vertheilen*

$$(7.)\qquad \begin{cases} \eta_1 = \dfrac{\psi_2^{\frac{3}{2}}}{4\pi a}\cdot\dfrac{m}{\varrho}\sum\limits_{n=0}^{\infty} Nk_1^{(n)}\Big(P_n(\cos\vartheta_1)-P_n(\cos\gamma_1)\Big), \\ \eta_2 = \dfrac{\psi_1^{\frac{3}{2}}}{4\pi a}\cdot\dfrac{m}{\varrho}\sum\limits_{n=0}^{\infty} Nk_2^{(n)}\Big(P_n(\cos\vartheta_2)-P_n(\cos\gamma_2)\Big) \end{cases}$$

und schliesslich hat das Potential des ganzen elektrischen Systems in einem äusseren Punkte $(\lambda, \vartheta, \varphi; \psi)$ *nach* (5.) *den Werth*

$$(8.)\quad \Omega = m\left\{\frac{1}{r}+\frac{\psi^{\frac{1}{2}}}{\varrho}\sum_{n=0}^{\infty}\left(k_1^{(n)}e^{N(\lambda-\lambda_1)}+k_2^{(n)}e^{N(\lambda_2-\lambda)}\right)\cdot\Big(P_n(\cos\vartheta)-P_n(\cos\gamma)\Big)\right\}.$$

Speziell auf jener Niveaufläche ist Ω *gleich* $\frac{m}{\varrho}$. — *Hier bedeutet* ϱ *den Radius der in Rede stehenden Orthogonalkugelfläche, r den Abstand des betrachteten Punktes von deren Centrum c, und ferner ist*

$$\cos\gamma = \cos\vartheta\cdot\cos\vartheta_c+\sin\vartheta\cdot\sin\vartheta_c\cdot\cos(\varphi-\varphi_c),$$

und endlich haben die Entwicklungscoefficienten $k^{(n)}$ *die in* (4.) *angegebenen Bedeutungen.*

Diese aus jenen drei Kugelflächen gebildete Niveaufläche nimmt in dem System sämmtlicher Niveauflächen eine ganz eigene Stellung ein. Wir können nämlich in diesem System wesentlich zwei Typen von Flächen unterscheiden, nämlich solche Flächen, die allein den Massenpunkt *m* einschliessen, und solche, welche das ganze elektrische Massensystem, also *m* und die beiden Conductorkugeln gleichzeitig, einschliessen. Als Grenzfall des einen Typus kann der Massenpunkt *m* selber mit dem Potential-

werthe ∞, als Grenzfall des anderen die unendlich ferne Kugelfläche mit dem Potentialwerthe 0 angesehen werden. Jene verzweigte Fläche (Potentialwerth $\frac{m}{\varrho}$) steht nun zwischen beiden Flächentypen, bildet den Uebergang von einem Typus zum anderen, wir können sie also füglich als eine *singuläre Niveaufläche* bezeichnen.

Durch die genaue Kenntniss dieser einen Fläche sind wir jetzt in den Stand gesetzt, uns auch von dem Verlauf der übrigen Niveauflächen eine klarere Vorstellung zu machen, wie vordem. — Die Niveauflächen werden zunächst den Massenpunkt m umgeben und sich immer mehr dem inneren Umriss jener singulären Fläche anschmiegen. Dann folgt diese Fläche selber. Die weiteren Flächen lehnen sich sodann an den äusseren Umriss derselben an, die ausgeprägten Formen dieses Umrisses schwächen sich allmählich ab, die Flächen nehmen immer mehr und mehr Kugelgestalt an und gehen schliesslich in die unendlich ferne Kugelfläche über. (vgl. die obige Figur). —

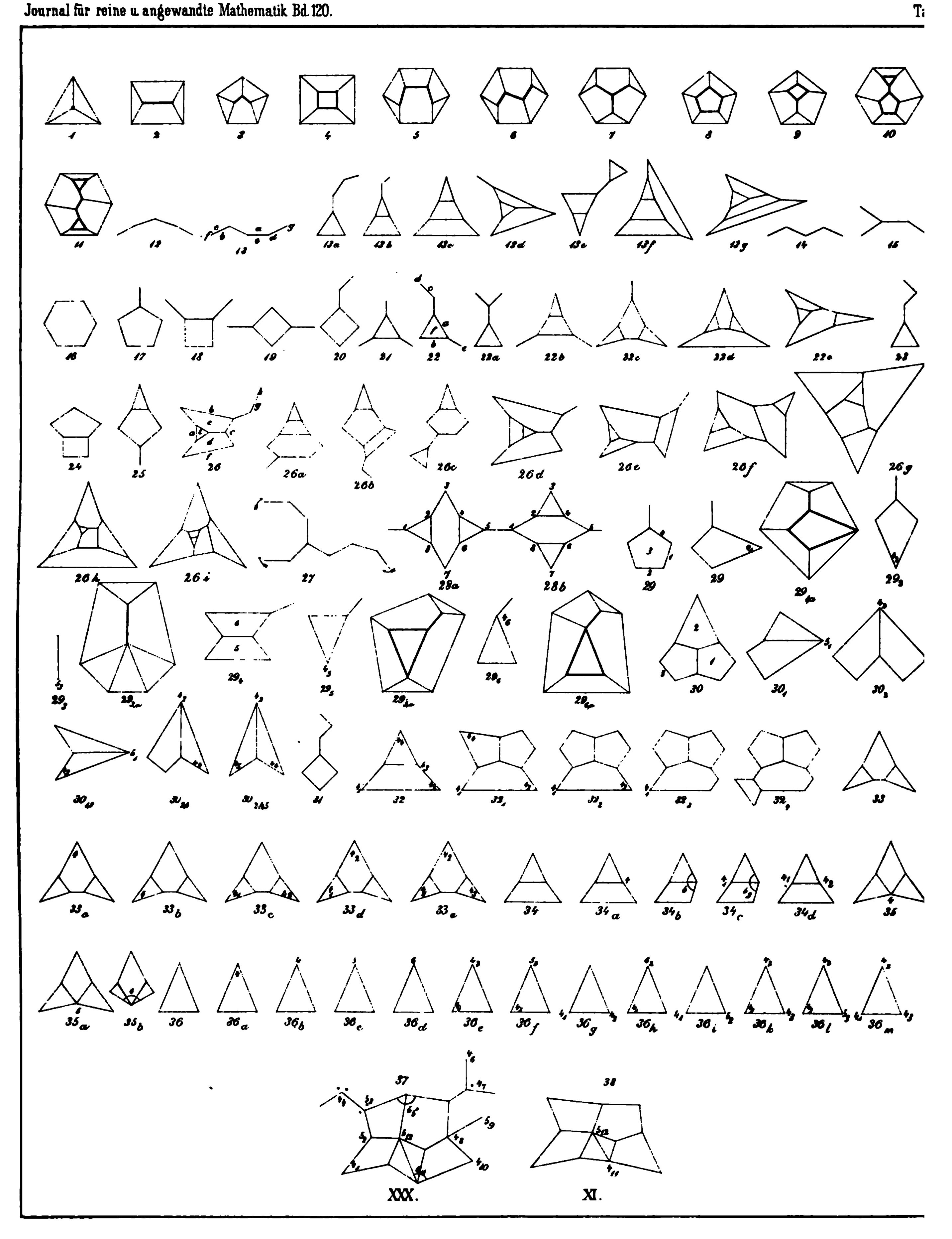
In den Kreisen, in denen die Orthogonalkugelfläche die Conductorkugeln schneidet, in denen also $\cos\vartheta = \cos\gamma$ ist, sind, wie aus (7.) ersichtlich, die Dichtigkeiten η_1 und η_2 gleich 0, es sind dies also neutrale Zonen, wie dies auch unmittelbar zu ersehen ist aus dem Verlauf der Niveauflächen mit Rücksicht auf die allgemeine Formel

$$\eta = -\frac{1}{4\pi}\frac{\partial\Omega}{\partial n}. \tag{9.}$$

Von den beiden Calotten, in die diese neutrale Zone jede der Conductorkugelflächen theilt, werden, wenn wir den inducirenden Pol m als positiv annehmen, auf den diesem Pole zugewandten negative, auf den abgewandten positive Belegungen vorhanden sein. Denn wie aus dem Verlaufe der Niveauflächen hervorgeht, wird Ω auf den dem Pole m zugewandten Calotten in der Richtung der Normalen n zunehmen, $\frac{\partial\Omega}{\partial n}$ also positiv und daher nach (9.) η negativ sein, und auf den m abgewandten Calotten liegen die Verhältnisse gerade umgekehrt. — Beziehen sich diese letzten Betrachtungen nun freilich alle nur auf unser ganz specielles elektrisches System, so dürfte es doch jetzt nicht schwer fallen, sich über den allgemeinen Verlauf der Niveauflächen und die damit zusammenhängenden Verhältnisse auch in anderen Fällen zu orientiren, wenn z. B. die Conductorkugeln bis zu anderen Spannungen geladen sind, oder der inducirende

Pol m eine andere Lage besitzt. Dabei sei jedoch noch bemerkt, dass im Allgemeinen *drei* verschiedene Typen von Niveauflächen zu unterscheiden sein werden, solche nämlich, die m allein, solche, die m und eine Conductorkugel, und endlich solche, die m und beide Conductorkugeln umschliessen. Den Uebergang von einem solchen Typus zum anderen werden stets solche singuläre, verzweigte Niveauflächen bilden. Es wird also im allgemeinen *zwei* solche singuläre Flächen geben, die dann freilich jede nur einmal verzweigt sind, nicht, wie in dem oben näher betrachteten Falle eine einzige aber doppeltverzweigte Fläche.

(Schluss folgt.)



Ueber diejenigen algebraischen Körper, welche aus zwei anderen componirt sind.

(Von Herrn *Kurt Hensel* in Berlin.)

In einigen kürzlich veröffentlichten Arbeiten*) bin ich auf die Elementartheiler derjenigen Systeme

$$(x_{hk}) = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12}, & \dots, & x_{1m} \\ x_{21} & x_{22}, & \dots, & x_{2m} \\ \vdots & & & \\ x_{n1} & x_{n2}, & \dots, & x_{nm} \end{pmatrix}$$

eingegangen, in welchen die Elemente der ersten Zeile beliebige algebraische Grössen eines Körpers n-ter Ordnung $\mathfrak{G}_1$ sind, während die Elemente der folgenden Zeilen aus denen der ersten dadurch hervorgehen, dass man von dem Körper $\mathfrak{G}_1$ zu den conjugirten $\mathfrak{G}_2, \mathfrak{G}_3, \dots, \mathfrak{G}_n$ übergeht. Jene Elementartheiler sind dann Potenzen rationaler Grössen des der Untersuchung zu Grunde gelegten Rationalitätsbereiches (R) mit rational gebrochenen Exponenten. Ist also P irgend eine unzerlegbare Grösse von (R) und sind

$$P^{\delta_1}, \quad P^{\delta_2}, \quad \dots, \quad P^{\delta_n}$$

die in jenen n Elementartheilern enthaltenen Potenzen von P, so sind die Exponenten $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n$ rationale Brüche, welche in jedem einzelnen Falle auf rationalem Wege bestimmt werden können.

Man kann nun jedes solches algebraische System (x_{ik}) durch geeignete Verbindung seiner Colonnen in ein äquivalentes System

$$(\xi_{ik}) = \begin{pmatrix} \xi_{11} & \xi_{12}, & \dots, & \xi_{1n} \\ \vdots & & & \vdots \\ \xi_{n1} & \xi_{n2}, & \dots, & \xi_{nn} \end{pmatrix}$$

derselben Art aber von nur n^2 Elementen transformiren, dessen Colonnen

*) Ueber die Fundamentaltheiler algebraischer Gattungsbereiche, dieses Journal Bd. 117 S. 333—345. Ueber die Elementartheiler zweier Gattungen, von denen die eine unter der anderen enthalten ist; ebenda S. 346—355.

der Reihe nach durch $P^{\delta_1}, P^{\delta_2}, \ldots, P^{\delta_n}$ theilbar sind, so dass also das System

$$\left(\frac{\xi_{ik}}{P^{\delta_k}}\right)$$

eine durch P nicht mehr theilbare Determinante hat, also ein Einheitssystem modulo P ist. Ein solches algebraisches System (ξ_{ik}), dessen Elementartheiler mit seinen Colonnentheilern, soweit sie Potenzen von P sind, übereinstimmen, nannte ich ein kanonisches System modulo P. Dividirt man die Elemente ξ_{ik} nur durch die grösste *ganze* Potenz $P^{[\delta_k]}$, welche in der k^{ten} Verticalreihe des Systemes (ξ_{ik}) enthalten ist, so erhält man ein neues kanonisches System

$$\left(\frac{\xi_{ik}}{P^{[\delta_k]}}\right) = (\bar{\xi}_{ik}),$$

dessen Elementartheiler jetzt aber diejenigen Potenzen:

$$P^{\delta_k - [\delta_k]} = P^{R(\delta_k)}$$

sind, deren Exponenten $R(\delta_k)$ die kleinsten nicht negativen Reste der Brüche δ_k, also *echte* Brüche oder Null sind. Ein solches System $\bar{\xi}_{11}, \ldots, \bar{\xi}_{1n}$ nannte ich ein ***kanonisches Fundamentalsystem*** modulo P, weil jede Grösse von $\mathfrak{G}_1$ durch dieses System homogen und linear mit modulo P ganzen Coefficienten dargestellt werden kann. Die Elementartheiler eines solchen Fundamentalsystemes nenne ich die ***Fundamentaltheiler*** von $\mathfrak{G}_1$, und in den oben erwähnten Arbeiten habe ich den Nachweis erbracht, dass diese zu den wichtigsten Invarianten der algebraischen Körper gehören.

Bei dem Beweise, dass jedes algebraische System (x_{ik}) einem kanonischen Systeme (ξ_{ik}) äquivalent ist, war nun nirgends vorausgesetzt worden, dass die Gleichungen $n$ten Grades, durch welche die n Körper $\mathfrak{G}_1, \mathfrak{G}_2, \ldots, \mathfrak{G}_n$ definirt werden, innerhalb (R) ***irreductibel*** sind, und im Folgenden sollen zunächst kurz die Consequenzen dargelegt werden, welche sich aus jener Aequivalenz unter der Annahme einer ***reductiblen*** Definitionsgleichung ziehen lassen.

Ich nenne ein algebraisches System (x_{gh}) irreductibel, wenn der zugehörige Körper $\mathfrak{G}_1$ wirklich von der $n$ten Ordnung ist, wenn also jede diesen Körper bestimmende Grösse einer irreductiblen Gleichung $n$ten Grades genügt. Ist dagegen $\mathfrak{G}_1$ von niedrigerer, als der $n$ten Ordnung, so soll (x_{ik}) ein reductibles algebraisches System genannt werden. In diesem Falle ist jenes

System offenbar aus einer Anzahl von irreductiblen Systemen niedrigerer Ordnung zusammengesetzt. Ist nämlich x_1 eine den Körper $\mathfrak{G}_1$ bestimmende algebraische Grösse, deren conjugirte $x_2\ x_3, \ldots, x_n$ die übrigen Körper $\mathfrak{G}_2, \ldots, \mathfrak{G}_n$ bestimmen mögen, so zerfällt in diesem Falle die Gleichung $n$ten Grades für x_1, $F(x)$ innerhalb (R) in eine Anzahl irreductibler Factoren, es besteht also eine Gleichung:

$$F(x) = F_1(x)F_2(x)\cdots F_\mu(x),$$

in welcher die Factoren auf der rechten Seite μ von einander verschiedene irreductible Functionen sind, deren Grade der Reihe nach gleich

$$s_1, \quad s_2, \quad \ldots, \quad s_\mu$$

sein mögen. Es sei die Bezeichnung der Wurzeln $x_1, \ldots, x_n$ und damit auch die der Körper $\mathfrak{G}_1, \ldots, \mathfrak{G}_n$ von vorn herein so gewählt, dass die s_1 ersten Grössen $x_1, \ldots, x_{s_1}$ die Wurzeln von $F_1 = 0$, die s_2 folgenden diejenigen von $F_2 = 0$ u. s. w. sind. Dann theilt sich das ganze System (x_{gh}) von selbst in μ irreductible Partialsysteme $S_1, S_2, \ldots, S_\mu$, von denen das erste aus den s_1 ersten Horizontalreihen, das zweite aus den s_2 folgenden, u. s. w., das letzte aus den s_μ letzten Zeilen von S besteht, so dass also jetzt jene irreductiblen Partialsysteme $S_1, \ldots, S_\mu$ der Reihe nach den irreductiblen Factoren $F_1(x), \ldots, F_\mu(x)$ entsprechen. Dann besteht der folgende wichtige Satz, welcher wieder die nahe Beziehung der arithmetischen Eigenschaften der Elementartheiler zu den algebraischen Eigenschaften der Körper deutlich erkennen lässt:

Besteht ein reductibles System S aus den irreductiblen algebraischen Systemen $S_1, S_2, \ldots, S_\mu$, so sind seine Fundamentaltheiler gleich denen seiner Theilsysteme zusammengenommen.

Zum Beweise dieses Satzes theile ich das algebraische Einheitssystem:

$$(\Sigma) = \left(\frac{\xi_{i1}}{p^{\delta_1}}, \quad \frac{\xi_{i2}}{p^{\delta_2}}, \quad \ldots, \quad \frac{\xi_{in}}{p^{\delta_n}}\right), \qquad (i=1, 2, \ldots, n)$$

welches aus dem kanonischen Systeme (ξ_{ik}) durch Division seiner Colonnen durch die zugehörigen Elementartheiler hervorgeht, wieder in die Partialsysteme $(\Sigma_1), (\Sigma_2), \ldots, (\Sigma_\mu)$, welche $S_1, S_2, \ldots, S_\mu$ entsprechen, und entwickele die Determinante $|\Sigma|$ dann nach dem *Laplace*schen Determinantensatze nach den Determinanten, welche man aus jenen μ Partialsystemen

14*

bilden kann. Sind dann:

$$\varDelta_1^{(\varrho)},\quad \varDelta_2^{(\varrho)},\quad \ldots,\quad \varDelta_\mu^{(\varrho)} \qquad\qquad (\varrho=1,2,\ldots)$$

alle Systeme von Unterdeterminanten, welche beiden Partialsystemen

$$\Sigma_1,\quad \Sigma_2,\quad \ldots,\quad \Sigma_\mu$$

angehören und keine Verticalreihe gemeinsam haben, so besteht nach jenem Satze die Gleichung:

$$\left|\frac{\xi_{ik}}{P^{\delta_k}}\right| = \sum_\varrho \varDelta_1^{(\varrho)}\varDelta_2^{(\varrho)}\cdots\varDelta_\mu^{(\varrho)}.$$

Da nun die linke Seite dieser Gleichung durch P garnicht theilbar ist, so gilt dasselbe von der rechten; in jener Summe existirt also mindestens ein Product, von welchem kein Factor durch P divisibel ist, und es sei die Bezeichnung der Elemente ξ_{ik} von vornherein so gewählt, dass diese Eigenschaft dem ersten jener Producte

$$\varDelta_1\varDelta_2\cdots\varDelta_\mu$$

zukommt, in welchem $\varDelta_1$ aus den *ersten* s_1 Colonnen von Σ_1, $\varDelta_2$ aus den folgenden s_2 Colonnen von Σ_2 u. s. w. $\varDelta_\mu$ aus den letzten s_μ Colonnen von Σ_μ gebildet ist.

Da somit die erste Determinante

$$\varDelta_1 = \begin{vmatrix} \frac{\xi_{11}}{P^{\delta_1}}, & \ldots, & \frac{\xi_{1s_1}}{P^{\delta_{s_1}}} \\ \cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot \\ \frac{\xi_{s_11}}{P^{\delta_1}}, & \ldots, & \frac{\xi_{s_1s_1}}{P^{\delta_{s_1}}} \end{vmatrix}$$

des Systems Σ_1 durch P garnicht mehr theilbar ist, so folgt, dass in der entsprechenden ersten Determinante von S_1

$$D_1 = \begin{vmatrix} \xi_{11}, & \ldots, & \xi_{1s_1} \\ \vdots & & \vdots \\ \xi_{s_11}, & \ldots, & \xi_{s_1s_1} \end{vmatrix}$$

die Elementartheiler mit den Colonnentheilern identisch und zwar gleich $P^{\delta_1}, \ldots, P^{\delta_{s_1}}$ sind. Also ist das zugehörige System $(\xi_{h1},\ldots,\xi_{hs_1})$ ein kanonisches System für die s_1 ersten conjugirten Bereiche $\mathfrak{G}_1, \ldots, \mathfrak{G}_{s_1}$ und seine Fundamentaltheiler sind die Potenzen $P^{R(\delta_1)}, \ldots, P^{R(\delta_{s_1})}$, stimmen also mit den s_1 ersten Fundamentaltheilern des ganzen Systemes $(\xi_{h1},\ldots,\xi_{hn})$ überein. Da man genau die gleichen Ueberlegungen für alle μ Systeme $\varDelta_1, \varDelta_2, \ldots, \varDelta_\mu$

durchführen kann, so ist hiermit der Beweis unseres Satzes vollständig erbracht.

Endlich war a. a. O. S. 343 gezeigt worden, dass man die Exponenten der Potenzen von P, welche in den Fundamentaltheilern eines *irreductiblen* Systemes enthalten sind, stets und nur auf eine Weise zu Bruchsequenzen $\left[\frac{1}{d}\right]=\left(\frac{0}{d}, \frac{1}{d}, \ldots, \frac{d-1}{d}\right)$ zusammenfassen kann, und aus dem soeben bewiesenen Satze folgt jetzt, dass auch die kleinsten Reste der Exponenten $\delta_1, \ldots, \delta_n$ für ein *reductibles* System (x_{ik}) in gleicher Weise zusammengefasst werden können; da aber eine solche Anordnung von n echten Brüchen, falls sie überhaupt möglich ist, nur auf eine Weise geschehen kann, so sind die zu S gehörigen Sequenzen mit der Gesammtheit der zu $S_1, S_2, \ldots, S_\mu$ gehörigen identisch, und man erhält so den Satz:

> Die zu einem beliebigen Primfactor P gehörigen Sequenzen eines reductiblen algebraischen Systemes S sind mit den Sequenzen identisch, welche zu den irreductiblen Bestandtheilen von S gehören.

In der erwähnten Abhandlung hatte ich gezeigt, wie man aus den zu P gehörigen Bruchsequenzen diejenige Potenz von P finden kann, welche in der Körperdiscriminante enthalten ist. Ist nämlich $\mathfrak{G}_1$ ein irreductibler Körper $n$ten Grades und sind:

$$\left[\frac{1}{d_1}\right], \left[\frac{1}{d_2}\right], \ldots, \left[\frac{1}{d_r}\right]$$

die zu P gehörigen Bruchsequenzen, so dass also

$$n = d_1+d_2+\cdots+d_r$$

ist, so enthält die Körperdiscriminante P genau in der Potenz

$$n-r = (d_1-1)+(d_2-1)+\cdots+(d_r-1),$$

denn die Hälfte dieser Zahl ist ja die Potenz von P, welche aus allen Colonnen der zugehörigen kanonischen Fundamentalsysteme herausgezogen werden kann. Sind nun $\mathfrak{G}_1, \mathfrak{G}_2, \ldots, \mathfrak{G}_n$ nicht sämmtlich conjugirt, also das zugehörige System (x_{hk}) oder das kanonische (ξ_{hk}) ein reductibles algebraisches System, so stimmen nach dem zuletzt bewiesenen Satze die den einzelnen Partialsystemen entsprechenden Bruchsequenzen in ihrer Gesammtheit mit denen von (ξ_{hk}) überein. Also ist auch das Product aller Discriminanten der einzelnen in (ξ_{hk}) auftretenden Körper genau durch P^{n-r} theilbar, und man erhält so den Satz:

Ist (x_{ik}) ein irreductibles oder reductibles algebraisches System $n$ter Ordnung und sind $\left[\frac{1}{d_1}\right], \ldots, \left[\frac{1}{d_r}\right]$ die zu P gehörigen Bruchsequenzen desselben, so ist das Product aller zu jenem Systeme zugehörigen Fundamentaldiscriminanten oder Körperdiscriminanten genau durch

$$P^{n-r} = P^{\Sigma(d_i-1)}$$

theilbar.

§ 2.

Es seien jetzt $\mathfrak{G}_1$ und G_1 zwei beliebige Körper bzw. vom $m$ten und vom $n$ten Grade und es bedeuten:

$$\mathfrak{G}_1, \mathfrak{G}_2, \ldots, \mathfrak{G}_m \quad \text{und} \quad G_1, G_2, \ldots, G_n$$

die zu $\mathfrak{G}_1$ und G_1 conjugirten Körper, endlich sei:

$$(\mathfrak{G}_1, G_1)$$

der aus $\mathfrak{G}_1$ und G_1 componirte Körper, oder nach der *Dedekind*schen Ausdrucksweise das *Product* von $\mathfrak{G}_1$ und G_1. Dann soll in diesem Abschnitte die folgende Aufgabe gelöst werden:

Es sollen die Fundamentaltheiler des Körperproductes aus den Theilern seiner Factoren bestimmt werden.

Der einfachste hier sich darbietende Fall ist nun der, dass der Grad des Productes $(\mathfrak{G}_1, G_1)$ gleich mn d. h. gleich dem Producte der Grade seiner Factoren $\mathfrak{G}_1$ und G_1 ist. Alsdann sind die mn Körper $(\mathfrak{G}_i, G_k)$, welche aus $(\mathfrak{G}_1, G_1)$ dadurch hervorgehen, dass man $\mathfrak{G}_1$ und G_1 unabhängig von einander durch die conjugirten $\mathfrak{G}_i$ und G_k ersetzt, sämmtlich zu einander conjugirt. In diesem einfachsten Falle kann die Lösung dieser Aufgabe aus den Resultaten einer früher von mir veröffentlichten Abhandlung*) ohne Schwierigkeit erschlossen werden.

Dagegen war ich damals noch nicht im Stande, dieselbe Frage in dem allgemeinsten Falle einfach zu beantworten, dass jene mn Körper nicht alle conjugirt sind, dass also der Grad von $(\mathfrak{G}_1, G_1)$ kleiner als mn ist. Ich will nun mit den im ersten Abschnitte gegebenen Hülfsmitteln jene Aufgabe in diesem allgemeinen Falle lösen, wie ich dieses a. a. O. S. 330 bereits in Aussicht gestellt hatte.

---

*) Ueber Gattungen, welche durch Composition aus zwei anderen Gattungen entstehen, dieses Journal Bd. 105. S. 329—344.

Es sei nämlich P irgend ein unzerlegbarer rationaler Factor,

$$\xi_{11},\ \xi_{12},\ \ldots,\ \xi_{1m} \quad \text{und} \quad \eta_{11},\ \eta_{12},\ \ldots,\ \eta_{1n}$$

zwei kanonische Systeme modulo P bezw. für $\mathfrak{G}_1$ und G_1 und es mögen

$$P^{\delta_1},\ P^{\delta_2},\ \ldots,\ P^{\delta_m} \quad \text{und} \quad P^{\varepsilon_1},\ P^{\varepsilon_2},\ \ldots,\ P^{\varepsilon_n}$$

die Elementartheiler der zugehörigen algebraischen Systeme:

$$(\xi_{gi}) \quad \text{und} \quad (\eta_{hk})$$

sein, welche dann also mit den betreffenden Colonnentheilern übereinstimmen.

Bildet man nun aus den m Elementen ξ_{1i} und den n Grössen η_{1k} die mn Producte:

$$(1.) \qquad \xi_{1i}\cdot\eta_{1k}, \qquad \binom{i=1,2,\ldots,m}{k=1,2,\ldots,n}$$

so gehören diese sämmtlich dem Körper $(\mathfrak{G}_1, G_1)$ an. Bildet man nun das System von mn Reihen:

$$(\xi_{gi}\cdot\eta_{hk}),$$

dessen übrige Zeilen man aus der ersten (1.) erhält, indem man $\mathfrak{G}_1$ und G_1 unabhängig von einander durch die conjugirten Körper $\mathfrak{G}_g$ und G_h ersetzt, so erhält man ein neues algebraisches System von $(mn)^2$ Elementen, dessen Zeilen den mn Körpern $(\mathfrak{G}_g, G_h)$ angehören, und dessen Determinante nach einem bekannten Determinantensatze gleich:

$$|\xi_{gi}|^n\cdot|\eta_{hk}|^m$$

ist. Daraus folgt aber ohne weiteres, dass jenes System $(\xi_{gi}\cdot\eta_{hk})$ ein kanonisches System für die Körper $(\mathfrak{G}_g, G_h)$ ist, und dass seine mn Colonnen- oder Elementartheiler gleich:

$$P^{\delta_i+\varepsilon_k} \qquad \binom{i=1,2,\ldots,m}{k=1,2,\ldots,n}$$

sind. Componirt man nämlich die beiden aus (ξ_{gi}) und (η_{hk}) hervorgehenden algebraischen Einheitssysteme:

$$\left(\frac{\xi_{gi}}{P^{\delta_i}}\right) \quad \text{und} \quad \left(\frac{\eta_{hk}}{P^{\varepsilon_k}}\right)$$

in genau derselben Weise, so erhält man das algebraische System

$$\left(\frac{\xi_{gi}\cdot\eta_{hk}}{P^{\delta_i+\varepsilon_k}}\right),$$

welches ebenfalls ein Einheitssystem modulo P ist, da seine Determinante nach dem soeben erwähnten Determinantensatze gleich

$$\left|\frac{\xi_{gi}}{P^{\delta_i}}\right|^n\cdot\left|\frac{\eta_{hk}}{P^{\varepsilon_k}}\right|^m,$$

also durch P nicht theilbar ist. Mithin stimmen die Colonnentheiler $P^{\delta_i+\varepsilon_k}$ des Systems $(\xi_{gi}\cdot\eta_{hk})$ mit seinen Elementartheilern in der That überein, und man erhält also den Satz:

Sind (ξ_{gi}) und (η_{hk}) kanonische Systeme modulo P für die Körper $\mathfrak{G}_1, \ldots, \mathfrak{G}_m$ und $G_1, \ldots, G_n$ mit den Elementartheilern P^{δ_i} und P^{ε_k}, so ist das componirte System $(\xi_{gi}\cdot\eta_{hk})$ ein kanonisches System für die mn componirten Körper $(\mathfrak{G}_i, G_k)$ und seine Elementartheiler sind mit den mn Producten $P^{\delta_i+\varepsilon_k}$ der Theiler beider Componenten identisch.

Aber auch die zu dem componirten Systeme $(\xi_{gi}\cdot\eta_{hk})$ zugehörigen Bruchsequenzen, in welche sich die kleinsten Reste der Exponenten $(\delta_i+\varepsilon_k)$ anordnen lassen, können jetzt aus den entsprechenden Sequenzen für die Reste der δ_i und die der ε_k leicht gefunden werden. Es seien nämlich:

$$\left[\frac{1}{d_1}\right], \quad \ldots, \quad \left[\frac{1}{d_r}\right] \quad \text{und} \quad \left[\frac{1}{e_1}\right], \quad \ldots, \quad \left[\frac{1}{e_s}\right]$$

die Sequenzen für die kleinsten Reste von $\delta_1, \ldots, \delta_m$ und $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n$, so dass also:

$$m = d_1+d_2+\cdots+d_r, \qquad n = e_1+e_2+\cdots+e_s$$

ist. Dann stimmen die kleinsten Reste aller mn Summen $\delta_i+\varepsilon_k$ überein mit den Resten der mn Summen:

$$\frac{\varrho_\alpha}{d_\alpha}+\frac{\sigma_\beta}{e_\beta}, \qquad \begin{pmatrix}\alpha=1,2,\ldots,r, & \varrho_\alpha=0,1,\ldots,d_\alpha-1\\ \beta=1,2,\ldots,s, & \sigma_\beta=0,1,\ldots,e_\beta-1\end{pmatrix} \tag{2.}$$

nämlich mit den Resten der Summen aller echten Brüche mit den Nennern d_α und e_β. Sind aber d und e zwei beliebige Zahlen und bedeuten (d, e) und $\{d, e\}$ bezw. ihren grössten gemeinsamen Theiler und ihr kleinstes gemeinsames Vielfaches, so lehrt eine elementare arithmetische Betrachtung, dass die kleinsten Reste der de Brüche:

$$\frac{\varrho}{d}+\frac{\sigma}{e} \qquad \begin{pmatrix}\varrho=0,1,\ldots,d-1\\ \sigma=0,1,\ldots,e-1\end{pmatrix}$$

sich in die (d, e)-mal wiederholte Sequenz $\left[\frac{1}{\{d, e\}}\right]$ anordnen lassen. Wendet man also dieses Resultat auf die Summen in (2.) an, so ergiebt sich der weitere Satz:

Sind $\left[\frac{1}{d_\alpha}\right]$ und $\left[\frac{1}{e_\beta}\right]$ die auf P bezüglichen Sequenzen für die Systeme (ξ_{gi}) und (η_{hk}), so sind die dem componirten Systeme

$(\xi_{gi}\,\eta_{hk})$ zugehörigen Sequenzen gleich $\left[\frac{1}{\{d_\alpha, e_\beta\}}\right]$ und jede von ihnen tritt genau (d_α, e_β) Male auf.

Es sei nun zunächst der componirte Körper $(\mathfrak{G}_1, G_1)$ vom Grade mn; dann ist das componirte kanonische System $(\xi_{gi}\cdot\eta_{hk})$ irreductibel, und die zu P gehörigen Sequenzen für $(\mathfrak{G}_1, G_1)$ sind demnach mit denen dieses Systems identisch. Man erhält also hier den Satz:

> Ist der Grad des componirten Körpers $(\mathfrak{G}_1, G_1)$ gleich dem Producte der Gerade seiner Componenten, so sind die zu einem beliebigen Theiler P gehörigen Sequenzennenner desselben die kleinsten Multipla aller Paare von Sequenzennennern seiner Componenten, und jede dieser Sequenzen tritt so oft auf, als der grösste gemeinsame Theiler der bezüglichen Nenner angiebt.

Ist dagegen der componirte Körper $(\mathfrak{G}_1, G_1)$ von niedrigerem als dem mnten Grade, so ist das componirte kanonische System $(\xi_{gi}\cdot\eta_{hk})$ reductibel und zerfällt dann in soviele irreductible algebraische Systeme, als unter den Körpern $(\mathfrak{G}_i, G_k)$ Systeme conjugirter Körper auftreten. Sind nämlich x_1 und y_1 zwei algebraische Grössen, welche bzw. die Körper $\mathfrak{G}_1$ und G_1 bestimmen, und bezeichnen a und b zwei geeignet gewählte ganze Zahlen, so ist die lineare Verbindung:

$$z_{11} = ax_1 + by_1$$

bekanntlich eine den componirten Körper $(\mathfrak{G}_1, G_1)$ bestimmende Grösse, und in gleicher Weise bestimmen

$$z_{gh} = ax_g + by_h \qquad \begin{pmatrix} g=1,2,\dots,m \\ h=1,2,\dots,n \end{pmatrix}$$

die mn Körper $(\mathfrak{G}_g, G_h)$. Zerlegt man nun die rationale Gleichung des mnten Grades:

$$F(z) = \Pi(z - z_{gh}),$$

der die mn Grössen z_{gh} genügen, in ihre irreductiblen Factoren, so erhält man in unserem allgemeinen Falle eine Gleichung:

$$F(z) = F_1(z)F_2(z)\cdots F_\mu(z),$$

und entsprechend zerfällt hier das reductible algebraische System $(\xi_{gi}\cdot\eta_{hk})$ in μ irreductible Partialsysteme, welche jenen Factoren zugeordnet sind. Dann vertheilen sich aber nach dem im ersten Abschnitte dieser Arbeit bewiesenen Satze die Sequenzen dieses reductiblen Systemes in der Weise auf die irreductiblen Partialsysteme, dass jene zusammengenommen mit diesen übereinstimmen. Man erhält also hier den folgenden Satz:

Sind die componirten Körper $(\mathfrak{G}_g, G_h)$ nicht sämmtlich conjugirt, so stimmen ihre Bruchsequenzen zusammengenommen mit den folgenden

$$(d_\alpha e_\beta)\left[\frac{1}{\{d_\alpha, e_\beta\}}\right]$$

überein, wenn:

$$\left[\frac{1}{d_\alpha}\right] \quad \text{und} \quad \left[\frac{1}{e_\beta}\right]$$

die bezüglichen Sequenzen für die beiden Componenten bedeuten.

Nach dem am Ende des ersten Abschnittes erwähnten Satze sind nun die Discriminanten der conjugirten Körper $(\mathfrak{G}_1, \mathfrak{G}_2, \ldots, \mathfrak{G}_m)$ und $(G_1, G_2, \ldots, G_n)$ bezw. durch:

$$P^{m-r} = P^{\sum\limits_\alpha (d_\alpha - 1)} \quad \text{und} \quad P^{n-s} = P^{\sum\limits_\beta (e_\beta - 1)}$$

theilbar und aus dem dort bewiesenen letzten Satze folgt jetzt, dass das Product aller Discriminanten der mn Körper $((\mathfrak{G}_1, G_1), \ldots, (\mathfrak{G}_h, \mathfrak{G}_i), \ldots)$, mögen diese nun alle unter einander conjugirt sein, oder in mehrere Reihen conjugirter Körper zerfallen genau durch

$$P^{mn - \sum\limits_\alpha \sum\limits_\beta (d_\alpha, e_\beta)} = P^{\sum\sum (d_\alpha e_\beta - (d_\alpha, e_\beta))}$$

theilbar ist.

Nochmals die reciproken Figuren der graphischen Statik.

(Von Herrn *Guido Hauck.*)

In meinem Aufsatze: „Ueber die reciproken Figuren der graphischen Statik" in Band 100 dieses Journals, S. 365, habe ich den Satz bewiesen, dass das Polarsystem jeder Rotationsfläche zweiter Ordnung in gleicher Weise wie das Nullsystem die Bedingung erfüllt, vermöge deren ein ebenes Stabnetz und sein zugehöriges Kräftenetz allgemein als Projektionen reciproker Polyedergebilde aufgefasst werden können. Es ist dabei die gemeinschaftliche Projectionsebene senkrecht zur Rotationsaxe anzunehmen; das Stabnetz entsteht als orthogonale Parallelprojection des einen Polyedergebildes, das Kräftenetz als Centralprojection des andern aus dem Mittelpunkte des Polarsystems.

Ich habe inzwischen gefunden, dass die obige Beschränkung auf Rotationsflächen nicht erforderlich ist, sondern dass auch das Polarsystem einer *dreiaxigen* Fläche zweiter Ordnung allgemein der genannten Bedingung zu genügen vermag. Der erwähnte Satz lässt sich folgendermassen erweitern:

Ein ebenes Stabnetz und sein zugehöriges Kräftenetz können angesehen werden als Projectionen zweier reciproken Polyedergebilde im Polarsystem irgend einer allgemeinen Fläche zweiter Ordnung auf eine Projectionsebene, welche parallel zu einer cyklischen Ebene ist; und zwar das Stabnetz als schiefe Parallelprojection in der Richtung des zugehörigen conjugirten Durchmessers, das Kräftenetz als Centralprojection aus dem Mittelpunkte des Polarsystems. — Beim hyperbolischen Paraboloid tritt an Stelle der cyklischen Ebene die Ebene eines gleichseitigen Hyperbelschnittes.

Zum Beweise des Satzes genügt es, gemäss den Ausführungen des

früheren Aufsatzes in Band 100: nachzuweisen, dass die in der angegebenen Weise gebildeten Projectionen irgend zweier einander polar zugeordneter Raumgeraden einen rechten Winkel bilden. Dies kann wie folgt geschehen:

Es sei $\varkappa$ die cyklische Ebene, zu welcher die Projectionsebene parallel ist, K sei der zugehörige conjugirte Durchmesser, welcher die Richtung für die schiefe Parallelprojection bestimmt. $\mathfrak{S}$ und $\mathfrak{T}$ seien irgend zwei einander polar zugeordnete Raumgerade. $\mathfrak{S}$ werde parallel zu K projicirt, $\mathfrak{T}$ central aus dem Mittelpunkte.

Ist nun S der zu $\mathfrak{S}$ parallele Durchmesser, und schneidet die durch S und K gelegte Ebene π (projicirende Ebene) die cyklische Ebene $\varkappa$ in s, so ist s parallel zur Parallelprojection von $\mathfrak{S}$.

Da ferner $\mathfrak{T}$ als Polare von $\mathfrak{S}$ in der conjugirten Durchmesserebene σ von S liegen muss, so stellt σ die centralprojicirende Ebene von $\mathfrak{T}$ vor, und daher ist ihre Schnittlinie t mit der Ebene $\varkappa$ parallel zur Centralprojection von $\mathfrak{T}$.

Es ist nun nachzuweisen, dass s und t zu einander rechtwinklig sind.

σ und $\varkappa$ sind die conjugirten Durchmesserebenen von S und K. Folglich muss die Schnittlinie t von σ und $\varkappa$ der conjugirte Durchmesser der Verbindungsebene π von S und K sein, und daher ist auch in dem ebenen Schnitte $\varkappa$ der Durchmesser t conjugirt zu dem Durchmesser s, nach welchem $\varkappa$ von π geschnitten wird. Da aber $\varkappa$ ein Kreisschnitt ist, so müssen t und s zu einander rechtwinklig sein.

Dieser Beweis gilt zunächst für alle *Mittelpunktsflächen.*

Für das *elliptische Paraboloid* (wo die Centralprojection zur Parallelprojection wird) bedarf er nur einer leichten Modification: Als gemeinschaftliche Projectionsebene dient irgend ein Kreisschnitt $\varkappa$, dessen conjugirter Durchmesser K sei, und durch dessen Mittelpunkt die Linie S parallel zu $\mathfrak{S}$ gezogen werde. Die durch S und K gelegte Ebene π schneide die Kreisebene $\varkappa$ nach s; die zu S conjugirte Durchmesserebene σ schneide $\varkappa$ nach der Sehne t. Nun hat wieder t die Ebene π zur conjugirten Durchmesserebene, also auch in dem Kreisschnitt $\varkappa$ die Linie s zum conjugirten Durchmesser. Folglich stehen s und t auf einander senkrecht.

Beim *hyperbolischen Paraboloid* tritt an Stelle des Kreisschnittes $\varkappa$ ein gleichseitiger Hyperbelschnitt. Im übrigen bleibt der Beweis ganz

derselbe wie beim elliptischen Paraboloid, bis auf den Schlusssatz: Die Linie t steht jetzt nicht mehr senkrecht auf ihrem conjugirten Durchmesser s wie beim Kreise. Dagegen bilden bei der gleichseitigen Hyperbel je zwei conjugirte Durchmesser, und also auch die Linien s und t, mit einer Asymptote gleiche Winkel. Dreht man daher die Linie t um eine Hyperbelaxe um 180° herum, so wird sie in der neuen Lage rechtwinklig zu s; dreht man um eine Asymptote, so wird sie zu ihr parallel. Man muss also beim hyperbolischen Paraboloid die eine Projectionsfigur vorher umwenden, so dass die vorherige Unterseite des Blattes nach oben zu liegen kommt. Je nachdem man diese Umwendung ausführt durch Drehung um 180° um eine Axe oder um eine Asymptote des gleichseitigen Hyperbelschnittes, erhält man die zwei Projectionsfiguren in rechtwinkliger oder in paralleler Lage.

Im Anschluss sei noch folgende allgemeine Bemerkung gestattet:

Man hat sich daran gewöhnt, dem *Nullsystem* eine besondere Bedeutung für die Theorie der reciproken Kräftepläne beizumessen. Man kann sich dabei aber doch eines mehr oder weniger unbestimmten Gefühls nicht entschlagen, dass in Beziehung auf diese Bedeutung noch nicht alles aufgeklärt sei. Dies rührt, wie mich dünkt, daher, dass man die unwillkürliche Voreingenommenheit hat, die Theorie der reciproken Kräftepläne müsse in irgend einer geheimen Beziehung zu den *statischen Eigenschaften* des Nullsystems stehen. Es scheint mir nun nicht überflüssig, es einmal unumwunden auszusprechen, dass eine solche Beziehung nicht existirt. Es müsste denn nachgewiesen werden, dass in den zwei im Nullsystem reciproken Polyedergebilden, als deren Projectionen sich Stabnetz und Kräftenetz darstellen, je zwei zugeordneten Raumgeraden die Bedeutung als Actionslinien zweier conjugirten Kräfte des durch das Nullsystem repräsentirten räumlichen Kräftesystems zugetheilt werden kann. Mir scheint eine solche Möglichkeit ausgeschlossen zu sein. Nach meiner Auffassung hat die reciproke Beziehung zwischen Stabnetz und Kräftenetz mit den auf die Theorie des räumlichen Kräftesystems bezüglichen statischen Eigenschaften des Nullsystems nichts gemein. Es ist eine Beziehung von lediglich *formal geometrischem,* nicht aber von *statischem* Charakter, und es kommen daher bei ihrer Begründung nur die geometrischen, nicht aber die statischen Eigenschaften des Nullsystems ins Spiel. Damit hängt es nun zusammen, dass jedes Polarsystem zweiter Ordnung, welches die einschlägigen geo-

metrischen Eigenschaften mit dem Nullsystem gemein hat, ganz in derselben Weise zur Begründung der Theorie der reciproken Kräftepläne berechtigt und geeignet ist wie das Nullsystem.

Man macht wohl auch zu Gunsten des Nullsystems geltend, dass man bei Benutzung eines Polarsystems zweiter Ordnung die eine der beiden reciproken Figuren vorher noch um einen rechten Winkel drehen müsse. Allein dies ist ein rein äusserlicher Umstand ohne sachliche Bedeutung. Eine Richtung oder Stellung wird sowohl in der Geometrie als in der Statik ebenso häufig durch die Parallele als durch die Normale dargestellt (vergl. z. B. Drehungsmomente). Kommt man überein, die Spannungskräfte in den Stäben eines Stabnetzes durch Strecken darzustellen, die zu den Stäben senkrecht gerichtet sind, so ist dies ebenso berechtigt und constructiv geeignet wie die Darstellung durch parallele Strecken. Es hat aber die dann sich ergebende rechtwinklige Lage der zwei reciproken Figuren vor der parallelen Lage den wesentlichen sachlichen Vorzug voraus, dass bei ihr die Wechselbeziehungen zwischen beiden Figuren hinsichtlich ihrer Gestaltungseigenthümlichkeiten ungleich klarer und übersichtlicher zu Tage treten als bei der parallelen Lage. (Man vergleiche hierzu Fig. 5 des früheren Aufsatzes in Band 100.)

Ueber eine Klasse nicht linearer Differentialgleichungen zweiter Ordnung.

(Von Herrn *Georg Wallenberg.*)

Briot und *Bouquet**) haben die nothwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür aufgestellt, dass eine algebraische Differentialgleichung erster Ordnung, in der die unabhängige Variable explicite nicht vorkommt, eindeutige Integrale besitze, und das wichtige Resultat gefunden, dass die Integrale, falls jene Bedingungen erfüllt sind, entweder rationale oder einfach periodische oder doppelt periodische Functionen sein müssen. Die Vermuthung, dass dieser Satz cum grano salis auch für algebraische Differentialgleichungen $f(y^{(n)}, y) = 0$ Geltung habe, führte mich dazu, die Untersuchung zunächst für $n = 2$ durchzuführen, und in der That fand ich meine Erwartung in diesem Falle bestätigt.**)

Es sei die Differentialgleichung

$$(A) \qquad F(y'', y) = 0 \quad \left(y'' = \frac{d^2y}{dz^2}\right)$$

vorgelegt, worin F eine ganze rationale Function ihrer Argumente bedeutet.

---

*) Journal de l'École Polytechnique, cahier 36, t. XXI, p. 199ff.

**) Herr *Picard,* dem ich die Resultate meiner Arbeit mittheilte, hat mich darauf aufmerksam gemacht, dass er das Theorem V (S. 129) bereits vor längerer Zeit gefunden hat (Bull. des scienes math. rédigé par *Darboux* et *Tannery* (2.) VII, p. 107ff). Dasselbe ist bei ihm eine Folge eines allgemeinen Satzes, dessen Beweis er später (Acta Math. 11 : 1, p. 1—12) vervollständigt hat und der so lautet: „Wenn zwischen zwei analytischen eindeutigen Functionen mit einer vereinzelten wesentlich singulären Stelle eine algebraische Relation besteht, so ist das Geschlecht dieser Relation höchstens gleich 1". — Trotzdem rechtfertigt sich wohl die Veröffentlichung der vorliegenden Arbeit, weil einerseits mein Beweis elementarer ist, da er direct an die Entwickelungen von *Briot* und *Bouquet* anknüpfend jenen Satz nicht voraussetzt, sondern für diesen speciellen Fall sogar beweist (Theor. IV. S. 129), und weil ich andererseits, ohne von einer Parameterdarstellung Gebrauch zu machen, an der Differentialgleichung selber erkennbare *explicite* Bedingungen für die Eindeutigkeit der Integrale aufstelle.

Solange y'', als durch (A) definirte Function von y aufgefasst, endlich, eindeutig und stetig bleibt, bleibt nach einem bekannten *Cauchy*schen Satze auch jedes Particularintegral y mit vorgeschriebenen — nicht singulären — Anfangswerthen endlich, eindeutig und stetig. Eine Verzweigung oder ein Unstetigwerden in endlichen*) Stellen z kann erst für solche Werthe von y eintreten, für welche y'' als Function von y unendlich oder vieldeutig wird. Man hat also y'' für $y = \infty$ und in der Umgebung derjenigen endlichen Stellen y_0 zu untersuchen, welche, wenn

$$(A^*) \qquad F(y'', y) = f_0(y)y''^m + f_1(y)y''^{m-1} + \cdots + f_{m-1}(y)y'' + f_m(y) = 0$$

ist und die Discriminante von $F = 0$, d. h. die Eliminationsresultante von y'' aus $F = 0$ und $\frac{\partial F}{\partial y''} = 0$, mit $D(y) = 0$ bezeichnet wird, Wurzeln von $f_0(y) = 0$ oder von $D(y) = 0$ sind.

Wir leiten nun zuerst von dem *Integral* ausgehend nothwendige Bedingungen dafür ab, dass ein Particularintegral von (A) für alle endlichen Werthe der unabhängigen Variablen z sich eindeutig und bestimmt verhalte**). Es möge das Particularintegral y für $z = z_0$ den Werth y_0 annehmen und in z_0 keine Verzweigungs- oder Unbestimmtheitsstelle besitzen; dann existirt eine Entwickelung:

$$(1.) \qquad y - y_0 = a_n(z-z_0)^n + a_{n+1}(z-z_0)^{n+1} + \cdots.$$

Es sei zunächst $n \geqq 2$; durch zweimalige Differentiation erhält man:

$$(2.) \qquad y'' = n(n-1)a_n(z-z_0)^{n-2} + (n+1)na_{n+1}(z-z_0)^{n-1} \cdots.$$

Aus (1.) ergiebt sich

$$z - z_0 = \frac{1}{\sqrt[n]{a_n}}(y-y_0)^{\frac{1}{n}} + \cdots,$$

---

*) Der unendlich ferne Punkt spielt i. a. die Rolle eines singulären Punktes, denn durch die Substitution $z = \frac{1}{t}$ wird (A): $F\left(t^4 \frac{d^2y}{dt^2} + 2t^3 \frac{dy}{dt}, y\right) = 0$; es kommt also t als unabhängige Variable explicite hinein. Der unendlich ferne Punkt kann also und wird auch i. a. für die Integrale der Differentialgleichung (A) ein Punkt der Unbestimmtheit sein; dagegen wird er keine Verzweigungsstelle sein, wenn alle endlichen Stellen es nicht sind, da seine Umkreisung einer in umgekehrtem Sinne vollzogenen Umkreisung eines genügend grossen endlichen Flächenstückes aequivalent ist.

**) D. h. den Charakter einer rationalen Function besitze.

und wenn dieser Werth für $z-z_0$ in (2.) eingesetzt wird:

$$y'' = b(y-y_0)^{\frac{n-2}{n}}+\cdots. \tag{3.}$$

Der Fall $n=1$ möge gesondert behandelt werden:

$$y-y_0 = a_1(z-z_0)+a_k(z-z_0)^k+\cdots (k \geqq 2),$$
$$y' = a_1+ka_k(z-z_0)^{k-1}+\cdots,$$
$$y'' = k(k-1)a_k(z-z_0)^{k-2}+\cdots,$$
$$y'' = b(y-y_0)^{k-2}+\cdots. \tag{4.}$$

In diesem Falle verzweigt sich also y'' *nicht* in y_0.

Wird ferner y für einen Werth $z=z_0$ unendlich gross, ohne sich daselbst zu verzweigen oder unbestimmt zu werden, so ist

$$y = a_{-n}(z-z_0)^{-n}+a_{-n+1}(z-z_0)^{-n+1}+\cdots,$$
$$\frac{1}{y} = \frac{1}{a_{-n}}(z-z_0)^n+a_{n+1}(z-z_0)^{n+1}+\cdots,$$
$$y'' = n(n+1)a_{-n}(z-z_0)^{-n-2}+(n-1)na_{-n+1}(z-z_0)^{-n-1}+\cdots,$$
$$y'' = b_0\left(\frac{1}{y}\right)^{-\frac{n+2}{n}}+b_1\left(\frac{1}{y}\right)^{-\frac{n+1}{n}}+\cdots. \tag{5.}$$

Eine zweite Art der Entwickelung lehrt noch mehr: Aus

$$y' = -na_{-n}z^{-n-1}+\cdots$$

erhält man

$$y' = c_0\left(\frac{1}{y}\right)^{-\frac{n+1}{n}}+c_1\left(\frac{1}{y}\right)^{-\frac{n}{n}}+\cdots,$$
$$y'^2 = c_0^2\left(\frac{1}{y}\right)^{-\frac{2n+2}{n}}+\cdots,$$

also

$$y'' = \frac{1}{2}\frac{dy'^2}{dy} = d_0\left(\frac{1}{y}\right)^{-\frac{n+2}{n}}+\cdots,$$

übereinstimmend mit (5.); aber es ergiebt sich weiter, da y'' durch Differentiation von y'^2 nach y entstanden ist, dass in der Entwickelung (5.) *der Coefficient von* $\frac{1}{y}$ *gleich Null sein muss;* dies gilt auch noch für $n=1$.

Aus (3.) folgt als vorläufiges Resultat: „Damit ein Particularintegral y in der Umgebung einer endlichen Stelle $z=z_0$, deren entsprechender Functionswerth $y=y_0$ $(n-1)$-fache Verzweigungsstelle $(n \geqq 2)$ der durch (A)

definirten algebraischen Function y'' von y ist, eindeutig und bestimmt (also in eine nach ganzen positiven Potenzen von $z-z_0$ aufsteigende Potenzreihe entwickelbar) sei, ist ***nothwendig,*** dass die Entwickelung von y'' nach steigenden Potenzen von $(y-y_0)^{\frac{1}{n}}$ mit der Potenz $(y-y_0)^{\frac{n-2}{n}}$ beginne*)". Ferner folgt aus (5): „Damit ein Particularintegral y in der Umgebung einer endlichen Stelle $z=z_0$, deren entsprechender Functionswerth $y=\infty$ $(n-1)$-fache Verzweigungsstelle $(n\geqq 1)$ der durch (A) definirten algebraischen Function y'' von y ist, eindeutig und bestimmt sei, ist ***nothwendig,*** dass die Entwickelung von y'' nach steigenden Potenzen von $\frac{1}{y}$ mit $\left(\frac{1}{y}\right)^{-\frac{n+2}{n}}$ beginne**) und darin der Coefficient von $\frac{1}{y}$ verschwinde".

Weiter ergiebt sich aus (3.) für $n=2$: „*Wenn y'' für einen Werth $y=y_0$ von Null verschieden ist, so darf in der die Gleichung (A) repraesentirenden Riemann*schen *Fläche y'' sich an der Stelle $y=y_0$ höchstens in zwei Blättern verzweigen";* und aus (5.) für $n=1$: „*y'' darf für $y=\infty$ höchstens von der dritten Ordnung unendlich werden und sich, wenn dieses Maximum erreicht wird, daselbst nicht verzweigen*".

Endlich kann man noch Folgendes erschliessen: Wenn y in der Umgebung einer Stelle $z=z_0$, der ein *endlicher* Werth $y=y_0$ entspricht, sich eindeutig und bestimmt verhält, so bleibt auch y'' für $z=z_0$ endlich; es darf also y'' für endliche Werthe von y nicht unendlich werden, d. h. in (A^*) muss $f_0(y)$, der Coefficient von y''^m, von y unabhängig, also eine Constante sein, die ohne Beschränkung der Allgemeinheit gleich 1 gesetzt werden kann. — Wenn y eine eindeutige Function von z ist, so ist auch $\nu=\frac{1}{y}$ eine solche; transformirt man daher die Gleichung (A) durch

$$y=\frac{1}{\nu},\quad y''=\frac{-\nu\nu''+2\nu'^2}{\nu^3}$$

in

$$f(\nu\nu''-2\nu'^2,\nu) = 0,$$

---

*) Ist n eine gerade Zahl $=2m$, so kann der Exponent des Anfangsgliedes sich auch auf $\frac{m-1}{m}$ reduciren, falls nur eine Verzweigung in m Blättern stattfindet.

**) Auch hier kann der Exponent des Anfangsgliedes sich auf $-\frac{m+1}{m}$ reduziren.

worin

$$f = (\nu\nu''-2\nu'^2)^m-\nu^3 f_1\left(\frac{1}{\nu}\right)(\nu\nu''-2\nu'^2)^{m-1}+\cdots+(-1)^m\nu^{3m}f_m\left(\frac{1}{\nu}\right)$$

ist, so muss, wenn ν in der Umgebung von $z=z_0$ mit dem entsprechenden Functionswerthe $\nu=0$ eindeutig und bestimmt sein soll, jedenfalls ν' und ν'', also auch $\nu\nu''-2\nu'^2$ für $\nu=0$ endlich bleiben*), d. h. *es darf $f_k(y)$ höchstens vom 3kten Grade in y sein.*

Soweit lassen sich durch Ausgehen vom Integral Schlüsse über die nothwendige Beschaffenheit der Differentialgleichung (A) ziehen, welche den von *Briot* und *Bouquet* für die Differentialgleichungen erster Ordnung aufgestellten Bedingungen analog sind. Während aber die *Briot-Bouquet*schen Bedingungen für die *allgemeine* Integrirbarkeit der Differentialgleichung $f(y',y)=0$ durch eindeutige Functionen nicht nur nothwendig, sondern auch hinreichend sind, ist dies für die Differentialgleichung (A) durchaus nicht der Fall und *kann* gar nicht der Fall sein, wie wir sogleich zeigen werden. Schon aus der Behandlung des Falles $n=1$ (S. 115) ergiebt sich als weitere Bedingung für die Eindeutigkeit und Bestimmtheit eines Particularintegrals, dass, wenn für $z=z_0$, $y=y_0$ der Anfangswerth $y'=y'_0$ von Null verschieden ist, y'' sich in $y=y$ *nicht* verzweigen darf, dass also umgekehrt, *wenn* y'' sich in $y=y_0$ verzweigt, $y'_0=0$ sein muss. — Aber wir können diese Verhältnisse besser an der vorgelegten Differentialgleichung selber studiren und gehen daher nunmehr von der Differentialgleichung (A) aus, um zu entscheiden, ob die bisher als nothwendig erkannten Bedingungen nicht zu enge**) und inwieweit sie auch hinreichend sind.

Es sei $y=a$ eine Wurzel der Discriminante $D(y)=0$ oder von $f_0(y)=0$ (oder von beiden Gleichungen), so lautet für die Umgebung der Stelle $y=a$ im allgemeinsten Falle die Entwickelung:

$$\text{(I.)} \qquad y'' = \sum_{\nu=-k}^{\infty} a_\nu (y-a)^{\frac{\nu}{n}} \quad (k,n \text{ ganze Zahlen, } n\geqq 1).$$

---

*) $\frac{\nu'^2}{\nu}$ braucht für $\nu=0$ *nicht* mehr endlich zu bleiben, sondern kann unendlich gross werden; nämlich dann, wenn die Entwickelung von ν nach steigenden Potenzen von $z-z_0$ mit der ersten Potenz von $z-z_0$ beginnt.

**) Wir haben nämlich bei unserer bisherigen vorbereitenden Untersuchung immer nur *endliche* Stellen $z=z_0$ in Betracht gezogen; es könnte sich aber ereignen, dass der in Frage stehende Functionswerth von y erst für den Punkt $z=\infty$ erreicht wird, der nach unserer Voraussetzung (vgl. S. 114 Anm.) singulärer Punkt sein darf.

Ist ein Residuum vorhanden, so ergiebt sich aus (I.), da $y''=\frac{1}{2}\frac{dy'^2}{dy}$ ist:

$$\text{(II.)}\qquad y'^2 = c+2a_{-n}\lg(y-a)+2\sum_{\nu=-k}^{\infty}{}' \frac{n}{n+\nu}a_\nu(y-a)^{\frac{n+\nu}{n}};$$

der Accent bedeutet, dass in der Summe $\nu=-n$ zu unterdrücken ist. Aus (II.) erhält man:

$$\int_a^y \frac{dy}{\sqrt{c+2a_{-n}\lg(y-a)+2\sum\limits_{\nu=-k}^{\infty}{}' \frac{n}{n+\nu}a_\nu(y-a)^{\frac{n+\nu}{n}}}} = z-z_0;$$

darin sind c und z_0 die willkürlichen Constanten der Integration. Da für $y=a$ der Integrand linkerhand verschwindet, das Integral also endlich bleibt, so lässt sich für jeden beliebigen Werth von c eine *endliche* Stelle $z=z_0$ vorschreiben, für welche $y=a$ wird und in deren Umgebung y sich *nicht* eindeutig und bestimmt verhält, da sonst eine logarithmenfreie Entwickelung (II.) resultiren würde. Es würden also sämmtliche Particularintegrale von (A) sich im Endlichen *nicht* überall eindeutig und bestimmt verhalten; das widerspricht der Voraussetzung, daher darf die Entwickelung der durch (A) definirten algebraischen Function y'' von y in der Umgebung einer endlichen Stelle $y=a$ keine Residuen besitzen. Dann folgt aber nach *Briot* und *Bouquet* (l. c.) aus (II.), dass, falls die Differentialgleichung (A) eindeutige Particularintegrale besitzen soll, in der Entwickelung (I.) auch die Coefficienten der übrigen negativen Potenzen von $y-a$ verschwinden müssen. Wir zeigen später (S. 124) und zwar *ohne* Benutzung des unendlich fernen Punktes), dass sämmtliche Periodicitätsmoduln des zur Gleichung (A) gehörigen *Abel*schen Integrals $\int y''dy$ ebenfalls verschwinden; daraus folgt, dass auch in den Entwickelungen von y'' in der Umgebung des Punktes $y=\infty$ keine Residuen auftreten können. Die Entwickelung (I.) lautet also nunmehr:

$$y'' = a_0(y-a)^{\frac{k}{n}}+a_1(y-a)^{\frac{k+1}{n}}+\cdots (n\geqq 2),$$

worin k nach Obigem jedenfalls eine *positive* ganze Zahl ist. Nun ist

$$y'' = \frac{1}{2}\frac{dy'^2}{dy},$$

also:

$$\text{(6.)}\qquad y'^2 = C+\frac{2na_0}{k+n}(y-a)^{\frac{k+n}{n}}+\frac{2na_1}{k+n+1}(y-a)^{\frac{k+n+1}{n}}+\cdots,$$

worin C die Integrationsconstante bedeutet.

Für $y = \infty$ gilt im allgemeinsten Falle die nach *fallenden* Potenzen von y fortschreitende Entwickelung

$$y'' = a_0 y^{\frac{k}{n}} + a_1 y^{\frac{k-1}{n}} + \cdots \quad (n \geqq 1),$$

in welcher nach Obigem der Coefficient von y^{-1} gleich Null ist.

Aus derselben ergiebt sich

$$(6^*.) \qquad y'^2 = C' + \frac{2na_0}{k+n} y^{\frac{k+n}{n}} + \frac{2na_1}{k+n-1} {}^{\frac{k+n-1}{n}} + \cdots.$$

Wir können die Gleichungen (6.) bez. (6*.) als ein „erstes" Integral von (A) betrachten; aus ihnen folgt, dass das allgemeine Integral von (A) die Form hat:

$$(B) \qquad y = \varphi(z - c_2, c_1),$$

worin c_1, c_2 die Integrationsconstanten bedeuten und φ eine Function von $z - c_2$ ist, deren „Coefficienten" von c_1 abhängen und die im Endlichen nur Verzweigungsstellen algebraischer Natur, also ausser dem unendlich fernen Punkt keine Stelle der Unbestimmtheit besitzt*), so dass die Untersuchung sich von nun an auf die Eindeutigkeit des Integrals beschränken kann.

Wählt man in (6.) die Integrationsconstante C von Null verschieden, so verschwindet y' für $y = a$ *nicht*, obwohl es sich daselbst verzweigt; folglich können die entsprechenden aus (6.) hervorgehenden Particularintegrale $y = \varphi(z - c_2)$ nach *Briot* und *Bouquet* (l. c., p. 212), oder wie man auch leicht direct aus (6.) durch Integration zeigt, in $z = c_2$, $y = a$ *nicht eindeutig sein.* Es ergiebt sich also zunächst die merkwürdige Thatsache, welche gleichzeitig einen fundamentalen Unterschied zwischen den *Briot-Bouquet*schen Differentialgleichungen und der Differentialgleichung (A) constituirt, *dass das allgemeine Integral von* (A) *keine eindeutige Function von z sein kann, es sei denn, dass F in y'' vom ersten Grade ist.*

In diesem Falle lautet die Differentialgleichung nach unserer obigen Untersuchung (S. 117):

$$(C) \qquad y'' = a_0 + a_1 y + a_2 y^2 + a_3 y^3,$$

---

*) Vgl. *Picard*, „Remarques sur les équations différentielles", Acta Math. 17 (1893), p. 297—300. *Painlevé*, „Sur les lignes singulières des fonctions analytiques", Ann. de la Faculté de Toulouse (1888), p. 38ff.

also

$$y'^2 = c_1 + 2a_0 y + a_1 y^2 + \tfrac{2}{3} a_2 y^3 + \tfrac{1}{2} a_3 y^4.$$

Daraus ergiebt sich im allgemeinsten Falle in bekannter Weise*)

$$y = \frac{a + b\,sn(g(z - c_2), k)}{1 + c\,sn(g(z - c_2), k)},$$

worin sn den Modularsinus bedeutet und die „Coefficienten" a, b, c, g, k in bestimmter algebraischer Weise von der Integrationsconstanten c_1 abhängen, während c_2 die zweite willkürliche Constante ist. In besonderen Fällen, d. h. für specielle Werthe der a_i sowie für eine besondere Wahl von c_1, kann y sich auch auf eine einfach periodische bez. auf eine rationale Function reduciren: in jedem Falle aber ist das *allgemeine Integral* der Differentialgleichung (C) eine *eindeutige* Function von z.

Ist jedoch die Differentialgleichung (A) in y'' von *höherem* als dem *ersten* Grade, so muss nach dem oben ausgesprochenen Satze die Fragestellung gänzlich verändert werden, wenn man zu positiven Resultaten gelangen will. Man darf nicht mehr fragen: „Wann ist das *allgemeine* Integral der Differentialgleichung (A) eindeutig?", da dies nach Obigem überhaupt unmöglich ist, sondern man muss sich darauf beschränken, die nothwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür aufzusuchen, dass die Differentialgleichung (A) eindeutige im Endlichen überall sich bestimmt verhaltende *Particularintegrale* besitze. — Bevor wir in diese Untersuchung eintreten, möge an einem Beispiele gezeigt werden, dass schon in den einfachsten Fällen das allgemeine Integral eine relativ complizirte Mehrdeutigkeit aufweist, während sehr einfache eindeutige Particularintegrale existiren.

Beispiel:

$$(D) \qquad y''^2 = y,$$

$$y'^2 = \bar{c}_1 + \tfrac{4}{3} y^{\frac{3}{2}}.$$

Für $\bar{c}_1 = 0$ ergeben sich die eindeutigen Particularintegrale

$$y = \frac{1}{144}(z - c)^4 \quad (c \text{ willkürliche Constante}).$$

Ist dagegen $\bar{c}_1$ von Null verschieden, so erhält man, wenn

$$y = t^2, \quad \bar{c}_1 = -\frac{c_1}{3}$$

---

*) Vgl. z. B. *Königsberger*, „Elliptische Functionen" (1874), I, S. 273.

gesetzt wird:

$$2\sqrt{3}\int\frac{tdt}{\sqrt{4t^3-c_1}} = z-c_2.$$

Nun ist aber*), wenn $4t^3-c_1$ mit T bezeichnet wird, bei geeigneter Festsetzung der Integrationsconstanten

$$\int^{(t,\sqrt{T})}\frac{tdt}{\sqrt{T}} = \frac{\sigma' u}{\sigma u},$$

worin

$$u = \int_{(t,\sqrt{T})}^{\infty}\frac{dt}{\sqrt{T}}, \quad \text{also } t = \wp(u; o, c_1)$$

ist. Das allgemeine Integral von (D) wird also durch folgende Gleichungskette dargestellt:

$$y = t^2, \quad t = \wp(u; o, c_1), \quad \frac{\sigma' u}{\sigma u} = \frac{1}{2\sqrt{3}}(z-c_2);$$

dasselbe ist offenbar mehrdeutig**).

Es möge nunmehr in (6.) $C = 0$ gewählt werden, dann ergiebt sich

$$(7.) \qquad y' = \pm\sqrt{\frac{2na_0}{k+n}}(y-a)^{\frac{k+n}{2n}}(1+b(y-a)^{\frac{1}{n}}+\cdots).$$

Ist $k+n$ eine ungerade Zahl, so muss, wenn y sich in der Umgebung jeder *endlichen* Stelle z, für die $y = a$ wird, eindeutig verhalten soll, nach *Briot* und *Bouquet* (l. c.) $k+n \geqq 2n-1$, also

$$k \geqq n-1$$

sein. Ist $k+n$ eine gerade Zahl, so muss

$$\frac{k+n}{2} \geqq n-1,$$

also

$$k \geqq n-2$$

sein. Da, wenn $k+n$ ungerade ist, selbstverständlich nicht $k = n-2$ sein

---

*) H. A. Schwarz, „Formeln und Lehrsätze zum Gebrauche der elliptischen Functionen", S. 87.

**) Die Mehrdeutigkeit liegt in der durch Umkehrung aus $\frac{\sigma' u}{\sigma u} = \frac{1}{2\sqrt{3}}(z-c_2)$ hervorgehenden Function u von $z-c_2$.

kann, so lassen sich die beiden Bedingungen in die eine zusammenfassen:

$$k \geqq n-2.$$

Diese Bedingung ist aber auch *hinreichend.* Um dies nachzuweisen, kann man zunächst $k < n$ voraussetzen. Denn es sei $k \geqq n$, so ergiebt sich aus (7.), dass dem Werthe $y = a$ ein unendlich grosser Werth von z entspricht*), und diesen hatten wir ausgeschlossen**); (die für die Eindeutigkeit einerseits aus dem Integral und andererseits aus der Differentialgleichung abgeleiteten nothwendigen Bedingungen stimmen also mit einander überein). Ist aber $k = n-1$, so folgt aus (7.):

$$y' = \sqrt{\frac{2na_0}{2n-1}}(y-a)^{\frac{2n-1}{2n}} + b_1(y-a)^{\frac{2n+1}{2n}} + b_2(y-a)^{\frac{2n+3}{2n}} + \cdots.$$

Und ist $k = n-2$, so folgt aus (7.):

$$y' = \sqrt{\frac{na_0}{n-1}}(y-a)^{\frac{n-1}{n}} + b_1(y-a)^{\frac{n}{n}} + b_2(y-a)^{\frac{n+1}{n}} + \cdots.$$

In beiden Fällen ergiebt sich nach *Briot* und *Bouquet* (l. c.), wie man auch leicht direct nachweisen kann, ein Particularintegral y, welches für einen vorgeschriebenen endlichen Werth von z gleich a wird und sich daselbst *nicht verzweigt.*

Für $y = \infty$ hatten wir die Entwickelung (S. 119):

$$y'' = a_0\left(\frac{1}{y}\right)^{-\frac{k}{n}} + a_1\left(\frac{1}{y}\right)^{-\frac{k-1}{n}} + \cdots,$$

worin der Coefficient von $\frac{1}{y}$ gleich Null ist; aus derselben ergiebt sich, wenn man die Differentialgleichung (A) durch $y = \frac{1}{v}$ transformirt:

$$-\frac{v''}{v^2} + \frac{2v'^2}{v^3} = a_0 v^{-\frac{k}{n}} + a_1 v^{-\frac{k-1}{n}} + \cdots \quad \text{(Coefficient von } v \text{ gleich Null)},$$

$$\frac{1}{2}\frac{dv'^2}{dv} - 2\frac{v'^2}{v} = -a_0 v^{2-\frac{k}{n}} - a_1 v^{2-\frac{k-1}{n}} - \cdots \quad \text{(Coefficient von } v^3 \text{ gleich Null)}.$$

Setzt man $v'^2 = p$, so wird

$$\frac{dp}{dv} - \frac{4}{v}p + 2a_0 v^{2-\frac{k}{n}} + 2a_1 v^{2-\frac{k-1}{n}} + \cdots = 0,$$

*) Vergl. *Königsberger,* l. c., S. 157—158.

**) Vergl. die Anmerkung, S. 114.

also

$$p = cv^4 - 2v^4 \int (a_0 v^{-2-\frac{k}{n}} + a_1 v^{-2-\frac{k-1}{n}} + \cdots) dv,$$

und da im Integranden der Coefficient von v^{-1} gleich Null ist,

$$v'^2 = cv^4 + \frac{2na_0}{n+k} v^{3-\frac{k}{n}} + \frac{2na_1}{n+k-1} v^{3-\frac{k-1}{n}} + \cdots,$$

also, wenn man ordnet und dann die Wurzel zieht,

$$(8.) \qquad v' = \pm \sqrt{\frac{2na_0}{n+k}}\, v^{\frac{3n-k}{2n}} (1 + bv^{\frac{1}{n}} + \cdots).$$

Soll y, also auch $v = \frac{1}{y}$ sich in der Umgebung jeder endlichen Stelle z, für die $v = 0$ wird, eindeutig verhalten, so muss wieder, wenn $3n-k$ eine ungerade Zahl ist, $3n-k \geqq 2n-1$, also

$$k \leqq n+1,$$

und wenn $3n-k$ eine gerade Zahl ist, $\frac{3n-k}{2} \geqq n-1$, also

$$k \leqq n+2$$

sein; da, wenn $3n-k$ ungerade ist, von selber nicht $k = n+2$ sein kann, so lassen sich die beiden Bedingungen in die eine zusammenfassen:

Diese Bedingung ist aber auch hinreichend: Zunächst kann man wieder $k > n$ voraussetzen, da sich für $k \leqq n+2$ aus (8.) ergiebt, dass dem Werthe $v = 0$ ein unendlich grosser Werth von z entspricht. Es bleiben also nur die Werthe $k = n+1$ und $k = n+2$, sodass auch hier die Bedingungen mit den aus dem Integral abgeleiteten übereinstimmen. Für $k = n+1$ folgt aber aus (8.):

$$v' = \sqrt{\frac{2na_0}{2n+1}}\, v^{\frac{2n-1}{2n}} + b_1 v^{\frac{2n+1}{2n}} + b_2 v^{\frac{2n+3}{2n}} + \cdots,$$

und für $k = n+2$

$$v' = \sqrt{\frac{na_0}{n+1}}\, v^{\frac{n-1}{n}} + b_1 v^{\frac{n}{n}} + b_2 v^{\frac{n+1}{n}} + \cdots;$$

in beiden Fällen ergiebt sich v, also auch y als eindeutige Function von z.

Um nun endgiltig die nothwendigen und hinreichenden Bedingungen für die Existenz eindeutiger, im Endlichen überall sich bestimmt verhaltender Particularintegrale zu fixieren, muss noch eine wichtige Ueberlegung angestellt werden: Wenn in der Umgebung *eines* Verzweigungspunktes $y = a$ der durch (A) definirten algebraischen Function y'' von y die Integrationsconstante C in (6.) gleich Null gewählt worden ist, so ist

dadurch ein particuläres „erstes" Integral der Differentialgleichung (A) festgelegt, und man kann nun *nicht* mehr über die bei der Entwickelung von y' in der Umgebung eines *anderen* Verzweigungspunktes auftretende Integrationsconstante frei verfügen. Es seien also $a_1, a_2, \ldots, a_r$ die im Endlichen liegenden Verzweigungsstellen der algebraischen Function y'' von y, so kann man z. B. die bei der Entwickelung von y' in der Umgebung von $y-a_1$ auftretende Integrationsconstante gleich Null wählen und erhält dadurch ein ganz bestimmtes particuläres erstes Integral von (A); dasselbe lässt sich, wenn die durch (A) definirte algebraische Function y'' von y mit $\varphi(y)$ bezeichnet wird, in der Form schreiben

$$(E) \qquad y'^2 = 2\int_{a_1}^{y} \varphi(y)\,dy,$$

da der Integrand für alle endlichen Werthe von y endlich bleibt.

Nun muss, wenn y eine eindeutige Function von z sein soll, nach unseren obigen Auseinandersetzungen y' auch an den übrigen endlichen Verzweigungsstellen verschwinden, d. h. es muss

$$(9.) \qquad \int_{a_1}^{a_i} \varphi(y)\,dy = 0 \qquad (i = 2, 3, \ldots, r)$$

sein, die Integrale auf geradem Wege erstreckt, und zwar für *sämmtliche* Zweige der algebraischen Function $\varphi(y)$. — Die Stelle $y = \infty$ kann hier ausser Betracht bleiben, da in (8.) die willkürliche Constante c mit ν^4 multiplizirt vorkommt. Da $\varphi(y)$ für alle endlichen Verzweigungsstellen endlich bleibt und die Umkreisung des unendlich fernen Punktes einer Umkreisung sämmtlicher *endlichen* Verzweigungsstellen in umgekehrter Richtung aequivalent ist, so setzen sich die Periodicitätsmoduln des *Abel*schen Integrals $\int^{y} \varphi(y)\,dy$ aus den Grössen $\int_{a_1}^{a_i} \varphi_k(y)\,dy$, wo die $\varphi_k(y)$ die verschiedenen Zweige der algebraischen Function $\varphi(y)$ bedeuten, linear homogen zusammen*), sind also infolge der Relationen (9.) sämmtlich gleich Null. Da auch sämmtliche Residuen des Integrals $\int \varphi(y)\,dy$ gleich Null sind, *so reducirt sich dasselbe auf eine algebraische Function***) *von y und*

*) Vergl. z. B. *Briot* und *Bouquet*, l. c., p. 203—205.

**) Wenn $\varphi(y)$ im Endlichen nur *einen* Verzweigungspunkt besitzt, z. B. $y = a$, so fallen die Bedingungsgleichungen (9.) fort. Man kann in diesem Falle $y - a = t^n$ setzen, wo n das kleinste Vielfache aller Nenner der in den Entwickelungen von $\varphi(y)$ nach

***zwar nach einem bekannten Satze von Abel auf eine rationale Function von** y **und** y''.* Infolgedessen stellt (E) eine *Briot-Bouquet*sche Differentialgleichung dar; ihr allgemeines Integral ist also entweder eine rationale oder eine einfach periodische oder eine doppelt periodische Function, und zwar im zweiten Falle eine rationale Function der Exponentialfunction, im dritten Falle eine rationale Function des Modularsinus und seiner Ableitung. Daraus ergiebt sich ferner, dass, falls die Differentialgleichung (A) eindeutige, im Endlichen überall sich bestimmt verhaltende Particularintegrale besitzt, die durch sie definirte algebraische Function y'' von y das Geschlecht 0 oder 1 hat; doch können hier im Gegensatze zu den *Briot-Bouquet*schen Differentialgleichungen auch in dem Falle, wo das Geschlecht gleich Null ist, die Integrale doppelt periodisch sein, wie schon das Beispiel der Differentialgleichung (C) lehrt.

Auf den ersten Blick könnte es scheinen, als ob sich aus den Untersuchungen von *Briot* und *Bouquet* von selber ergäbe, dass *transcendente* Differentialgleichungen $f(y', y) = 0$ keine im Endlichen überall sich bestimmt verhaltenden eindeutigen Functionen als allgemeines Integral besitzen könnten; dann wäre das zuletzt gefundene Resultat, dass $\int \varphi(y)dy$ eine algebraische Function sein muss, trivial. Eine genauere Ueberlegung zeigt aber, dass die *Briot-Bouquet*schen Betrachtungen sehr wohl auf transcendente Differentialgleichungen übertragen werden können, und als Kern der Sache stellt sich dann heraus, dass y' als Function von y zwar mehrdeutig, unter Umständen sogar unendlich vieldeutig sein kann, dass y' aber jedenfalls für *alle* Werthe von y (auch für $y = \infty$) sich *bestimmt* verhalten und zwar für endliche Werthe von y endlich bleiben muss, wenn das Integral y eine eindeutige Function der unabhängigen Variablen z sein soll. So ist z. B. das Integral $y = \log(z - c)$ der Differentialgleichung $y' = e^{-y}$ deshalb mehr-

---

Potenzen von $y - a$ auftretenden Exponenten ist; dadurch wird $\varphi(y) = \varphi(t^n + a) = \psi(t)$, und $\psi(t)$ ist eine Function, die sich sowohl im Endlichen wie im Unendlichen rational verhält, d. h. $\psi(t)$ ist eine rationale Function von t. Daher besteht das Integral

$$\int \varphi(y)dy = n\int \psi(t)t^{n-1}dt$$

aus einer endlichen Summe von Logarithmen und einer rationalen Function von t; der logarithmische Theil muss nach Obigen (S. 118) fortfallen, sodass $\int \varphi(y)dy$ wiederum eine algebraische Function von y wird.

deutig, weil e^{-y} in $y = \infty$ eine Stelle der Unbestimmtheit besitzt, sodass in der durch $y = \frac{1}{\nu}$ transformirten Gleichung

$$\nu' = -\nu^2 e^{-\frac{1}{\nu}}$$

ν' für $\nu = 0$ unendlich gross werden kann, wenn ν auf geeignetem Wege in 0 einrückt; und in allen Fällen, wo y' wie hier gleich einer *eindeutigen* transcendenten Function von y ist, findet Analoges statt, weil eine solche Function mindestens eine Stelle der Unbestimmtheit besitzen muss. Ganz anders aber verhält es sich bei *mehrdeutigen* transcendenten Functionen: Bekanntlich hat Herr *Fuchs* eine ganze nach ihm benannte Klasse linearer homogener Differentialgleichungen aufgestellt, deren Integrale sich überall bestimmt verhalten, also den algebraischen Functionen relativ am nächsten stehen. Es sei $\varphi(y)$ ein solches Integral, so wird die Differentialgleichung $y' = \varphi(y)$ z. B. dann durch eindeutige im Endlichen sich überall bestimmt verhaltende Functionen von z integrirbar sein können, wenn in der Differentialgleichung, der $\varphi(y)$ genügt, die Wurzeln sämmtlicher determinirenden Fundamentalgleichungen von einander verschiedene, sich nicht um ganze Zahlen unterscheidende rationale Brüche sind, deren Zähler, falls der Nenner gleich n, mindestens gleich $n-1$ ist (für die Wurzeln der zu $y = \infty$ gehörigen determinirenden Gleichung braucht der Zähler nur $\geqq -n-1$ zu sein), und wenn die Gruppe der Differentialgleichung für $\varphi(y)$ discontinuirlich ist*). Diesen Anforderungen genügt z. B. die Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$\frac{d^2\varphi(y)}{dy^2} - \frac{1}{2}\frac{R'(y)}{R(y)}\frac{d\varphi(y)}{dy} + \left[\frac{1}{2}\left(\frac{R'(y)}{R(y)}\right)^2 - \frac{1}{2}\frac{R''(y)}{R(y)}\right]\varphi(y) = 0,$$

in welcher $R(y)$ eine ganze rationale Function vierten Grades in y ist und deren allgemeines Integral

$$\varphi(y) = \sqrt{R(y)}\left(\alpha + \beta\int\frac{dy}{\sqrt{R(y)}}\right)$$

lautet, worin α und β die Integrationsconstanten bedeuten. In der That ist das Integral der Differentialgleichung

$$\frac{dy}{dz} = \sqrt{R(y)}\left(\alpha + \beta\int\frac{dy}{\sqrt{R(y)}}\right)$$

---

*) Vergl. *Schlesinger,* Handbuch der Theorie der linearen Differentialgleichungen, II_1, S. 270—288.

eine eindeutige Function, die nur im Unendlichen eine Stelle der Unbestimmtheit besitzt, nämlich

$$y = \psi\left(\frac{e^{\beta(z-c)}-\alpha}{\beta}\right),$$

wo ψ der Algorithmus einer doppelt periodischen Function und c die willkürliche Constante ist.

Aber auch das Auftreten von Logarithmen in der Differentialgleichung hindert nicht die Eindeutigkeit des Integrals, wie das einfache Beispiel der Differentialgleichung

$$(F.) \qquad y' = y\log y^{*})$$

lehrt, deren allgemeines Integral

$$y = e^{e^{z-c}}$$

lautet. Es wird nicht ohne Nutzen sein, diese einfache Differentialgleichung etwas genauer zu discutiren: Die durch (F) definirte Function y' von y hat unendlich viele Zweige; beschreibt die unabhängige Variable z einen Weg derart, dass y den Nullpunkt k-mal in positiver und l-mal in negativer Richtung umkreist, so geht die Gleichung (F) über in

$$y' = y(\log y+(k-l)2\pi i);$$

es findet hier aber nichts anderes statt als in dem Falle, wo y' eine *algebraische* Function von y ist, nur dass die Anzahl der „Zweige" der Differentialgleichung dort endlich, in unserem Falle aber unendlich gross ist. Betrachten wir einen bestimmten Zweig unserer Differentialgleichung:

$$(F') \qquad y' = y(\log y+2k\pi i).$$

Für $z = 0$**) sei $y = 1$, also das zugehörige $y' = 2k\pi i$; das Particularintegral mit diesen Anfangsbedingungen lautet

$$(10.) \qquad y = e^{2k\pi i e^{z}}.$$

---

*) Man findet leicht: Damit die Differentialgleichung $f\left(\frac{y'}{y}, \log y\right) = 0$, in welcher f eine ganze rationale Function ihrer Argumente bedeutet, eindeutige, im Endlichen überall bestimmte Integrale besitze, ist nothwendig und hinreichend, dass in der durch $y = e^{\frac{1}{v}}$ transformirten Gleichung, die eine *Briot-Bouquet*sche sein muss, die Entwickelung von v' nach steigenden Potenzen von v mit einer Potenz von v beginne, deren Exponent mindestens gleich der Einheit ist.

**) Durch Verschiebung des Nullpunktes in der complexen z-Ebene kann der *willkürliche* Punkt z_0 stets nach 0 verlegt werden.

Geht $\xi = e^z$ auf der realen Axe von 1 bis $\frac{k \pm l}{k}$ (k, l ganze positive Zahlen, $l \leqq k$), also z ebenfalls auf der realen Axe von 0 bis $\log \frac{k \pm l}{k}$, so vollführt y unterdessen l Umläufe in positiver bez. negativer Richtung auf dem Einheitskreise um den Nullpunkt, sodass $\log y$ übergeht in $\log y \pm 2 l \pi i$ und die Differentialgleichung (F') jetzt lautet:

$$y' = y(\log y + 2(k \pm l)\pi i);$$

in der That ergiebt sich aus (10.) für $z = \log \frac{k \pm l}{k}$:

$$y = e^{2(k \pm l)\pi i} = 1, \quad y' = 2(k \pm l)\pi i.$$

Geht insbesondere z von 0 bis $-\infty$, so hat y gerade k Umläufe in negativer Richtung vollführt, sodass die Differentialgleichung (F') nunmehr

$$y' = y \log y$$

lautet; in der That wird nach (10.) für $z = -\infty$: $y = 1$, $y' = 0$.

Dem Werthe $y = 1$ entsprechen die Stellen

$$z = \log m - \log k + r\pi i,$$

worin m alle positiven, r alle positiven und negativen ganzzahligen Werthe annehmen kann; dieselben liegen auf aequidistanten geraden Linien, die der realen Axe parallel laufen und von einander den Abstand π haben; sie bilden eine *isolirte* Punktmenge*), wie es der Eindeutigkeit des Integrals gemäss der Fall sein muss.

Nach diesem Excurs in das Gebiet der transcendenten Differentialgleichungen erster Ordnung kehren wir zu unserem eigentlichen Thema zurück. Wir können die erlangten Resultate in die folgenden Sätze zusammenfassen:

I.) Das allgemeine Integral einer Differentialgleichung (A) $F(y'', y) = 0$, worin F eine ganze rationale Function ihrer Argumente bedeutet, kann keine eindeutige Function der unabhängigen Variablen z sein, ausser in dem Falle, wo F in y'' linear ist.

II.) Die nothwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür, dass die Differentialgleichung (A) eindeutige im Endlichen überall sich bestimmt verhaltende Partikularintegrale besitze, sind die folgenden:

1) *Die Differentialgleichung hat die Gestalt*

$$y''^m + f_1(y) y''^{m-1} + \cdots + f_k(y) y''^{m-k} + \cdots + f_{m-1}(y) y'' + f_m(y) = 0,$$

---

*) Vergl. *Schlesinger*, a. a. O. S. 278.

worin $f_k(y)$ *eine ganze rationale Function höchstens* $3k$-ten *Grades in* y *ist.*

2) *Wenn die durch* (A) *definirte algebraische Function* $y'' = \varphi(y)$ *sich für einen endlichen Werth* $y = y_0$ *in* $n(\geqq 2)$ *Blättern verzweigt, so muss in der Entwickelung von* y'' *nach steigenden Potenzen von* $(y-y_0)^{\frac{1}{n}}$ *der Exponent des Anfangsgliedes mindestens gleich* $\frac{n-2}{2}$ *sein; daher muss, wenn* $n > 2$ *ist,* $y_0'' = \varphi(y_0) = 0$ *sein.*

3) *Wenn* y'' *sich für* $y = \infty$ *in* $n(\geqq 1)$ *Blättern verzweigt, so darf in der Entwickelung von* y'' *nach fallenden Potenzen von* $y^{\frac{1}{n}}$ *der Exponent der höchsten Potenz von* y *höchstens gleich* $\frac{n+2}{n}$ *sein, während der Coefficient von* y^{-1} *gleich Null sein muss; wenn daher* y'' *für* $y = \infty$ *von der dritten Ordnung unendlich gross wird, darf es sich daselbst nicht verzweigen.*

4) *Es muss* $\int_{a_i}^{a_k} \varphi(y)dy$, *erstreckt zwischen zwei beliebigen endlichen Verzweigungspunkten* a_i *und* a_k *von* $\varphi(y)$, *gleich Null sein.*

Da infolge der angegebenen Bedingungen $\int \varphi(y)dy$ nach Obigem eine algebraische Function von y sein muss, so kann man den zweiten Satz auch in kürzerer Form folgendermassen aussprechen:

III.) Damit die Differentialgleichung (A) *eindeutige, im Endlichen sich überall bestimmt verhaltende Particularintegrale besitze, ist nothwendig und hinreichend, dass ein Particularintegral erster Ordnung derselben eine Briot-Bouquet*sche *Differentialgleichung sei.*

Dass diese Bedingung hinreicht, ist nach den Entwickelungen von *Briot* und *Bouquet* a priori klar; die Bedeutung des letzten Satzes liegt darin, dass sie auch *nothwendig* ist. Aus demselben folgt:

IV.) Das Geschlecht der durch (A) *definirten algebraischen Function* y'' *von* y *darf höchstens gleich* 1 *sein*).*

V.) Die rationalen, einfach periodischen und doppelt periodischen Functionen sind die einzigen eindeutigen, im Endlichen überall sich bestimmt verhaltenden Functionen, die zu ihrer zweiten Ableitung in algebraischer Beziehung stehen).*

Das Theorem V. bestätigt die in der Einleitung ausgesprochene Vermuthung für den Fall $n = 2$.

---

*) Vergl. *Picard*, a. a. O.

Aus den weiteren Ausführungen von *Briot* und *Bouquet* (a. a. O. S. 216) ergiebt sich noch Folgendes:

VI.) Die Differentialgleichung (A) möge den vier oben aufgestellten Bedingungen genügen: 1) *Wenn dann der Exponent des Anfangsgliedes in der Entwickelung von* y'' *nach steigenden Potenzen von* $y-y_0$ *für jede Wurzel* $y=y_0$ *von* $f_m(y)=0$ *kleiner als* 1, *dagegen für* $y=\infty$ *in der Entwickelung von* y'' *nach fallenden Potenzen von* y *grösser als* 1 *ist, so sind die eindeutigen Particularintegrale doppelt periodische Functionen.* 2) *Ist der Exponent des Anfangsgliedes in der Entwickelung von* y'' *nach steigenden Potenzen von* $y-y_0$ *für eine Wurzel* $y=y_0$ *von* $f_m(y)=0$ *gleich* $\frac{n+2}{n}$, *während das folgende Glied mit dem Exponenten* $\frac{n+3}{n}$ *verschwindet, oder gleich* $\frac{n+1}{n}$, *oder ist derselbe für* $y=\infty$ *in der Entwickelung von* y'' *nach fallenden Potenzen von* y *gleich* $\frac{n-2}{n}$ *während das folgende Glied mit den Exponenten* $\frac{n-3}{n}$ *verschwindet, oder gleich* $\frac{n-1}{n}$, *so sind die eindeutigen Particularintegrale rationale Functionen.* 3) *Andernfalls sind dieselben einfach periodische Functionen.*

Zum Schluss mögen noch die Haupttypen der *binomischen* Differentialgleichungen $F(y'', y)=0$ mit eindeutigen Particularintegralen, deren Gestalt sich aus den oben aufgestellten Bedingungen leicht ergiebt, hier Platz finden; dabei bedeute R_k eine ganze rationale Function höchstens $k$ten Grades in y:

$$1)\quad y'' = R_3$$

$$2)\quad y''^2 = (2R_1'R_2+3R_1R_2')^2R_2$$

$$3^a)\quad y''^3 = R_3'^3\cdot R_3$$

$$3^b)\quad y''^3 = A(y-a)(y-b)^2[12y^2-(8a+7b+9c)y+3ab+4bc+5ca]^3$$

$$4^a)\quad y''^m = A(y-a)^{m-2}(y-b)^{m+2}\left(y-\frac{(m+1)a+(m-1)b}{2m}\right)^m \text{ (} m \text{ ungerade)}$$

$$4^b)\quad y''^m = A(y-a)^{m-1}(y-b)^{m+1}\left(y-\frac{(2m+1)a+(2m-1)b}{4m}\right)^m.$$

Ausser dem Typus 4), dessen eindeutige Integrale rationale Functione sind, giebt es also keine irreductible binomische Differentialgleichung (A höheren als *dritten* Grades. Die Differentialgleichung 1) ist die einzig deren *allgemeines* Integral eindeutig ist. Die Gleichungen 1), 2) und

sind vom Geschlecht Null, obwohl ihre eindeutigen Integrale i. a. doppelt periodische Functionen sind; die Gleichung 3^a.) ist also die einzige vom Geschlecht 1.

Die Untersuchung der Differentialgleichungen

$$f\left(\frac{y''}{y'},\, y\right)=0, \quad f(y'^k y'', y)=0$$

für ein beliebiges positives k,

$$f\left(\frac{y'''}{y'},\, y\right)=0, \quad f\left(y'''+\frac{y''^2}{y'},\, y\right)=0$$

und

$$f\left(\frac{y'''}{y'^2}-\frac{y''^2}{y'^3},\, y\right)=0$$

führt zu einem dem Theorem V. analogen Resultat.

Ueber einen besonderen Kettenbruch mit negativen Theilzählern nebst einleitenden allgemeineren Bemerkungen zur Convergenz oder Oscillation der Kettenbrüche.

(Von Herrn *Louis Saalschütz* in Königsberg.)

In der vorliegenden Arbeit werden zuerst Kriterien für die Convergenz oder Oscillation eines Kettenbruches aufgestellt, welche, soviel ich weiss, bisher noch nicht benutzt worden sind. Dann wird eine für ihre Anwendung geeignete Methode entwickelt und dieselbe zur Grundlage der Untersuchung eines besonderen Kettenbruches gemacht.

Dieser Kettenbruch besitzt die Theilnenner a_n und die Theilzähler $-b_n$, die, von Anfang oder von einer späteren Stelle $n = n_0$ an, das Gesetz:

$$a_n = \alpha_0 n + \alpha_1, \quad b_n = \beta_0 n^2 + \beta_1 n + \beta_2, \quad \alpha_0 > 0, \quad \beta_0 > 0$$

befolgen. Stellt man die Gleichung für A:

$$A^2 - \alpha_0 A + \beta_0 = 0$$

auf, so hat diese entweder zwei positive reelle, oder zwei complexe oder zwei gleiche Wurzeln. Im ersten Falle convergirt der Kettenbruch, abgesehen von einer durch speciellen Werth von a_1 bedingten Ausnahme, in welcher er in bestimmter Art unendlich wird. Zugleich nähert sich der Quotient zweier auf einander folgenden Näherungsnenner $Q_n : Q_{n-1}$ mit wachsendem n dem Grenzwerthe $A'n + B'$, wo A' die grössere Wurzel obiger Gleichung und B' eine von ihr abhängige Constante ist, während der unendliche Kettenbruch

$$\cfrac{b_n}{a_n - \cfrac{b_{n+1}}{a_{n+1} - \ddots}}$$

mit wachsendem n dem Werthe $A''n + B''$ zustrebt, wo A'' die kleinere

Wurzel obiger Gleichung und B'' eine von ihr in gleicher Art wie B' von A' abhängige Constante ist. Hat die Gleichung zwei complexe Wurzeln, so oscillirt der Kettenbruch; hat sie zwei gleiche reelle Wurzeln, so hängt die Natur desselben in bestimmter Art von den anderen gegebenen Constanten α_1, β_1, β_2 ab*). Im gegenwärtigen Aufsatz wird der erste Fall behandelt, während ein in Vorbereitung begriffener die beiden anderen Fälle besprechen soll.

§ 1.

Convergenz-Kriterien.

Ist ein Kettenbruch

$$X = \frac{X_1}{b_1} = \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{b_2'}{a_2 + \cfrac{b_3'}{a_3 + \ddots}}} \qquad (1.)$$

den wir der Raumersparniss wegen, wenn kein Zweifel möglich ist, folgendermassen

$$X = 1/a_1 + b_2'/a_2 + b_3'/a_3 + \cdots$$

schreiben, zur Untersuchung vorgelegt, so besteht ein wesentlicher Theil derselben in der Entscheidung über seine Convergenz oder Nicht-Convergenz. Dafür lassen sich in folgender Art Kriterien gewinnen. Bezeichnen wir die Zähler und Nenner der Näherungswerthe des Kettenbruches (1.) mit $P_1, P_2, \ldots P_n$, $Q_1, Q_2, \ldots Q_n$, sodass

$$P_1 = 0, \quad P_2 = 1, \quad P_3 = a_2, \cdots$$
$$Q_1 = 1, \quad Q_2 = a_1, \quad Q_3 = a_2 a_1 + b_2', \cdots$$

und die Näherungswerthe selbst mit

$$N_1 = \frac{P_1}{Q_1}, \quad N_2 = \frac{P_2}{Q_2}, \quad \ldots, \quad N_n = \frac{P_n}{Q_n},$$

so gelten, wie bekannt, folgende Formeln:

$$(2.) \qquad P_n = a_{n-1} P_{n-1} + b_{n-1}' P_{n-2}, \quad Q_n = a_{n-1} Q_{n-1} + b_{n-1}' Q_{n-2}$$

$$(3.) \qquad N_n - N_{n-1} = (-1)^n \frac{b_2' \cdots b_{n-1}'}{Q_{n-1} Q_n}.$$

*) Man vergleiche meine vorläufigen Mittheilungen über dieses Thema in den Schriften der Physik.-Oekon. Ges. zu Königsberg für das Jahr 1897, Sitzung vom 13. Mai (38. Bd. S. 37—41), worin die obige Angabe noch näher präcisirt wird.

und ebenso

$$N_{n+1}-N_n = (-1)^{n+1}\frac{b_2'\cdots b_n'}{Q_nQ_{n+1}}.$$

Die Division der beiden letzten Formeln ergiebt:

$$\frac{N_{n+1}-N_n}{N_n-N_{n-1}} = -b_n'\frac{Q_{n-1}}{Q_{n+1}},$$

woraus nach (2.)

$$\text{(4.)}\qquad \frac{N_{n+1}-N_n}{N_n-N_{n-1}} = -\frac{1}{\frac{a_n}{b_n'}\frac{Q_n}{Q_{n-1}}+1}$$

oder indem wir, wenigstens von einem gewissen n an, *die Theilnenner a_n durchweg als positiv annehmen*, für b_n' positiv, und für b_n' negativ $= -b_n$ getrennt:

$$\text{(5.)}\qquad \frac{N_{n+1}-N_n}{N_{n-1}-N_n} = \frac{1}{\frac{a_n}{b_n'}\frac{Q_n}{Q_{n-1}}+1}$$

und

$$\text{(6.)}\qquad \frac{N_{n+1}-N_n}{N_n-N_{n-1}} = \frac{1}{\frac{a_n}{b_n}\frac{Q_n}{Q_{n-1}}-1}.$$

Ist auf der rechten Seite von (5.) der erste Summand des Nenners eine mit wachsendem n *nicht* oder mindestens so langsam nach Null convergirende Zahl, dass die Reihe $\sum_n\frac{a_n}{b_n'}\frac{Q_n}{Q_{n-1}}$ divergirt, so nähert sich das Product

$$\frac{N_{n+1}-N_n}{N_{n-1}-N_n}\cdot\frac{N_{n+2}-N_{n+1}}{N_n-N_{n+1}}\cdots\frac{N_{n+m+1}-N_{n+m}}{N_{n+m-1}-N_{n+m}}$$

und folglich auch die Differenz $N_{n+m+1}-N_{n+m}$ mit wachsendem Index dauernd bis zur 0 herab abnehmenden Grössen, deren Zeichen regelmässig abwechseln, daher ist die Summe $(N_{n+m+1}-N_{n+m})+(N_{n+m+2}-N_{n+m+1})+\cdots$ d. h. $N_\infty-N_{n+m}$ eine endliche bestimmte Grösse, folglich auch N_∞ d. i. X selbst.

Ist also $\frac{a_n}{b_n'}\cdot\frac{Q_n}{Q_{n-1}}$ auch für $n=\infty$ von Null verschieden oder divergirt mindestens die unendliche Reihe $\sum_n\frac{a_n}{b_n'}\cdot\frac{Q_n}{Q_{n-1}}$, so convergirt der Kettenbruch X, convergirt hingegen die genannte Reihe, so oscillirt er.

Denn im letzteren Falle nähert sich der Absolutwerth der Differenz $N_{n+m+1}-N_{n+m}$ mit wachsendem m einer endlichen Grösse.

Man kann mitunter noch leichter d. h. ohne $\frac{Q_n}{Q_{n-1}}$ entwickeln zu müssen

(und auch leichter als nach dem *Stern*schen Kriterium) entscheiden, ob ein Kbr. (d. h. Kettenbruch) mit positiven Theilzählern und Theilnennern convergirt. Ist z. B. $a_n \gtreqless 1$, so ist $Q_n > Q_{n-1}$, also genügt dann schon die Divergenz der Reihe $\sum_n \frac{a_n}{b'_n}$ um den Kbr. convergent zu machen, wie für $a_n = n^\alpha$, $b'_n = n^{\alpha+1}$, $\alpha \gtreqless 0$; oder, da $Q_n > a_{n-1} Q_{n-1}$ (s. (2.)), genügt zu gleichem Erfolg die Divergenz der Reihe $\sum_n \frac{a_n a_{n-1}}{b'_n}$, wie bei $a_n = n^\alpha$, $b'_n = n^{\alpha+2}$, $\alpha \gtreqless 1$*.)

---

*) Vgl. *Stolz*, Allgem. Arithmetik, Bd. II, S. 284.

Uebrigens ist obiger Kbr. auch noch für $\alpha = 0$ convergent: denn für den Kbr., dessen erster Theilnenner unregelmässig ist, $1/2 + 2^2/1 + 3^2/1 + \cdots$, ist $\frac{Q_2}{Q_1} = 2$, $\frac{Q_3}{Q_2} = 3$, überhaupt (wie direct oder mit Hülfe der späteren Gl. (10.) mit $b'_n = -b_n = +n^2$, $a_n = 1$, $n \gtreqless 2$, zu erkennen): $\frac{Q_n}{Q_{n-1}} = n$, also $\frac{a_n}{b'_n} \cdot \frac{Q_n}{Q_{n-1}} = \frac{1}{n}$, und $\sum_n \frac{1}{n}$ divergirt. Demnach convergirt auch der Kbr. $2^2/1 + 3^2/1 + \cdots$ und also auch $1/1 + 2^2/1 + 3^2/1 + \cdots$, was, in der Sache selbst, bekannt ist.

Hingegen ist ein Beispiel eines oscillirenden Kbrs. der folgende, der dem von *Stern* als Beispiel gegebenen sehr ähnlich ist.

$$X = 1/3 + 3/1 + 8/1 + 15/1 + 32/1 + 63/1 + \cdots,$$

also: $a_1 = 3$, aber für $n > 1 : a_n = 1$; und für ungerades $n : b'_n = 2^n$, für gerades $n : b'_n = 2^n - 1$, also auch überhaupt:

$$b'_n = 2^n - \frac{1}{2}(1 + (-1)^n).$$

Man findet durch Induction und bestätigt es durch die spätere Gl. (10.):

$$\text{für ungerades } n : \frac{Q_n}{Q_{n-1}} = 2^{\frac{n-1}{2}}$$

$$\text{für gerades } n : \frac{Q_n}{Q_{n-1}} = 2^{\frac{n}{2}} + 1,$$

also ist

$$\text{für ungerades } n : \frac{a_n}{b'_n} \cdot \frac{Q_n}{Q_{n-1}} = \frac{1}{2^{\frac{n+1}{2}}}$$

$$\text{für gerades } n : \frac{a_n}{b'_n} \cdot \frac{Q_n}{Q_{n-1}} = \frac{1}{2^{\frac{n}{2}} - 1}.$$

Beide Reihen $\sum_n \frac{1}{2^{\frac{n+1}{2}}}$ (n unger.) und $\sum_n \frac{1}{2^{\frac{n}{2}} - 1}$ (n gerade) convergiren. In der That ist $\lim (N_m - N_{m-1}) = \text{const.} \times \frac{2^2-1}{2^2+1} \cdot \frac{2^3-1}{2^3+1} \cdot \frac{2^4-1}{2^4+1} \cdots$, welches eine endliche von Null verschiedene Grösse ist.

Sind nunmehr die Theilzähler sämmtlich, oder wenigstens von einer gewissen Stelle an, negativ, sodass wir es mit dem Kettenbruch

$$(7.)\qquad X = 1/a_1 - b_2/a_2 - b_3/a_3 - \cdots$$

zu thun haben, so haben wir an die Gl. (6.) anzuknüpfen. Wenn alle Näherungsnenner positiv sind*), so ergeben sich folgende Regeln:

1) *Ist von einem gewissen n, $n = \nu$ an und für alle grösseren n:*

$$\frac{a_n}{b_n}\frac{Q_n}{Q_{n-1}} - 1 > 1,$$

so convergirt der Kettenbruch.

2) *Ist*

$$\frac{a_n}{b_n}\frac{Q_n}{Q_{n-1}} - 1 \overline{\gtrless} 1,$$

so hat der Kbr. einen unendlich grossen Werth. Dabei muss der Fall besonderer Untersuchung vorbehalten bleiben, dass für ein $n < \nu$ irgend ein b_n verschwindet, weil dann das Product hinter Gl. (6.) trotz obiger Voraussetzung wegen des einen Factors $1 : \left(\frac{a_n}{b_n}\frac{Q_n}{Q_{n-1}} - 1\right)$, in welchem $b_n = 0$, Null oder unbestimmt sein würde.

---

*) Das Negativwerden eines Theiles der Grössen Q_n behindert an sich noch nicht, dass der Kbr. convergire oder in bestimmter Art unendlich werde. So sind für den Kbr. mit negativen Theilzählern, für welchen:

$$a_n = n^2,\quad b_n = 2n^2\{(2+(-1)^n)n^2 + 4n + 2\}$$

oder:

$$a_{2n} = 4n^2,\quad b_{2n} = 16n^2\{6n^2 + 4n + 1\}$$
$$a_{2n+1} = (2n+1)^2,\quad b_{2n+1} = 2(2n+1)^2\{4n^2 + 12n + 7\},$$

die Näherungsnenner:

$$Q_{2n} = (-1)^{n-1}2^{2n-1}(2n)!^2,\quad Q_{2n+1} = (-1)^n 2^{2n}(2n+1)!^2$$

also

$$\frac{Q_{2n}}{Q_{2n-1}} = 8n^2,\quad \frac{Q_{2n+1}}{Q_{2n}} = -2(2n+1)^2;$$

daher nähert sich der Nenner der rechten Seite von (6.) für $2n$ statt n, der Zahl $-\frac{2}{3}$, für $2n+1$ statt n, der Zahl -2, folglich $\frac{N_{2n+2} - N_{2n+1}}{N_{2n} - N_{2n-1}}$ der Zahl $^3/_4$, woraus klar wird, dass die Differenz $N_{2n+2m} - N_{2n+2m-1}$ und ebenso auch die Differenz $N_{2n+2m+1} - N_{2n+2m}$ sich mit wachsendem m der Null nähert, dass also der Kbr. convergirt. — Man kann dieses Resultat auch prüfen, indem man direct die rechte Seite von (3.) bildet, welche sich, für $2n$ statt n, wie für $2n+1$ statt n bei hinreichend grossem n proportional $n^{\frac{2}{3}}(^3/_4)^n$ also auch der Null (von verschiedenen Seiten) zustrebend erweist.

3) Ist

$$\frac{a_n}{b_n}\frac{Q_n}{Q_{n-1}}-1 = 1+\delta_n, \qquad \begin{matrix}\delta_n > 0\\ \lim\delta_n = 0\end{matrix}$$

so genügt nicht die Divergenz der Reihe $\delta_n+\delta_{n+1}+\delta_{n+2}\cdots$ für die Convergenz des Kbrs., sondern es muss direct geprüft werden, ob die durch Multiplication sich ergebenden Differenzen $N_{n+m+1}-N_{n+m}$, $N_{n+m+2}-N_{n+m+1}$, $N_{n+m+3}-N_{n+m+2}, \ldots$ welche sämmtlich dasselbe Zeichen haben, eine convergente Reihe bilden. Nur in diesem Falle convergirt der Kettenbruch, im entgegengesetzten Falle ist sein Werth unendlich gross.

4) *Nähert sich* $\frac{Q_n}{Q_{n-1}}$ *keinem irgendwie von* n *abhängig zu machenden Grenzwerthe, und zwar der Art, dass die Werthe von* $\frac{a_n}{b_n}\frac{Q_n}{Q_{n-1}}$ *über das ganze reelle Zahlengebiet verstreut liegen, so strebt der Kbr. keinem festen endlichen oder unendlichen Werthe zu.* Denn gleichzeitig mit obigen Werthen liegen dann auch diejenigen von $1:\left(\frac{a_n}{b_n}\frac{Q_n}{Q_{n-1}}-1\right)$ über das ganze Zahlengebiet verstreut, und für die Differenzen $N_{n+m+1}-N_{n+m}$ gilt dasselbe.

Die Benutzung der soeben aufgestellten Kriterien erheischt die Auffindung eines Grenzwerthes für $\frac{Q_n}{Q_{n-1}}$. Setzen wir in der zweiten Gleichung (2.) $b'_{n-1}=-b_{n-1}$, indem wir fortan nur von Kettenbrüchen mit negativen Theilzählern*) reden wollen, so erhalten wir mittels Division:

$$\frac{Q_n}{Q_{n-1}} = a_{n-1}-\frac{b_{n-1}}{\frac{Q_{n-1}}{Q_{n-2}}}.$$

Daraus folgt einerseits die bekannte Entwickelung

$$(8.)\qquad \frac{Q_n}{Q_{n-1}} = a_{n-1}-b_{n-1}/a_{n-2}-b_{n-2}/a_{n-3}-\cdots-b_2/a_1$$

andererseits mit $n+1$ statt n, und wenn wir die Bezeichnung

$$(9.)\qquad U_n=\frac{Q_n}{Q_{n-1}}, \quad U_{n+1}=\frac{Q_{n+1}}{Q_n}$$

einführen, die Functionalgleichung:

$$(10.)\qquad U_n(U_{n+1}-a_n)+b_n = 0.$$

*) Dabei lassen wir es stillschweigend immer zu, dass die *anfänglichen* Theilzähler und Theilnenner auch andere Zeichen haben dürfen.

Diese Gleichung ist die Grundlage gegenwärtiger Arbeit*). Gehen wir von einem bestimmten U_k, z. B. von $U_3 = a_2 - \frac{b_2}{a_1}$, aus, so können wir mittels derselben successive $U_{k+1}, U_{k+2}, \ldots, U_n$ finden. Sind nun a_n und b_n als Functionen von n gegeben, so kann man die Vermuthung aufstellen, dass U_{n+1} ebenso von $(n+1)$ wie U_n von n abhänge. Man darf dies aber nicht, durch die Bezeichnung irre geleitet, als selbstverständlich ansehen, weil überhaupt die Darstellbarkeit von U_n als analytischer Function nicht behauptet werden kann. Es verhält sich mit U_n und U_{n+1} gewissermassen ähnlich wie mit $n!$ und $(n+1)!$. Auch hier enthält der Ausspruch „$(n+1)!$ entsteht aus $n!$, indem $(n+1)$ an Stelle von n gesetzt wird," zunächst nur eine *sprachlich* richtige Thatsache, und sie gewinnt erst *sachliche* Bedeutung,

---

*) In der Zeit zwischen der Vollendung der vorliegenden Arbeit, welche am 21. Juni 1897 in die Hände der Redaction dieses Journals gelangte, und ihrer Drucklegung hat ausser anderen geschätzten Fachgenossen, von denen Arbeiten über die Kettenbrüche in Vorbereitung begriffen sind, Herr *Pringsheim* einen interessanten Aufsatz: „Ueber die Convergenz unendlicher Kettenbrüche" in den Sitzungsberichten der math. phys. Klasse der K. bayr. Akad. d. Wiss. 1898 Bd. XXVIII S. 295—324 erscheinen lassen. Darin bezeichnet er einen Kettenbruch

$$b'_m/a_m + b'_{m+1}/a_{m+1} + \cdots \text{ in infin.},$$

worin die b'_k und a_k beliebige reelle oder complexe Werthe haben dürfen, als „unbedingt convergent", wenn er nicht nur für $m = 1$, sondern für jeden beliebigen Werth von m einen bestimmten endlichen Werth besitzt, und giebt als hinreichendes Kriterium dafür an (S. 323):

$$\text{(a)} \qquad \left| \frac{b_\nu}{a_{\nu-1} a_\nu} \right| \overline{\overline{<}} \frac{1}{4}, \qquad (\nu \overline{\overline{>}} 3)$$

wozu noch die Bedingung

$$\text{(b)} \qquad \left| \frac{b_2}{a_1 a_2} \right| < \frac{1}{2}$$

hinzutritt. Die wahre Quelle des Kriteriums (a) liegt meiner Ansicht nach, wenngleich Herr *Pringsheim* auf anderem Wege dazu gelangt ist, in unserer Gl. (10.), welche bereits in dem erwähnten sehr knappen Auszuge vorliegender Arbeit als Doppelgleichung (7.) und (8.) der Oeffentlichkeit übergeben worden ist. Aber unsere Gleichung leistet noch mehr.

Diesen Ausspruch beabsichtige ich in einer eigenen kleinen Arbeit zu rechtfertigen und bemerke hier nur, dass der umfassenden Forderungen wegen, die Herr *Pringsheim* stellt, seine Kriterien in vielen Fällen zu beschränkend ausfallen müssen. So liefert z. B. die genannte Gleichung (10.) für einen Kbr. mit lauter positiven Theilzählern (b'_n) und Theilnennern (a_n) als die nothwendige und hinreichende Bedingung der Convergenz des Kettenbruches die Divergenz der Reihe $\sum_n \sqrt{\frac{a_n a_{n-1}}{b'_n}}$.

wenn für $n!$ der *Stirling*sche Näherungswerth eingeführt wird. Aehnlich ist es auch mit U_n und U_{n+1}. Allerdings gelingt es mitunter, U_n in *geschlossenem* Ausdruck so darzustellen, dass dadurch sowohl die Gl. (10.) genau erfüllt, als auch ein specieller Werth von U_n z. B. U_3 genau hervorgebracht wird (wie in dem in der Anmerkung S. 136 angegebenen Kettenbruch), dann ist die obige Vermuthung vollkommen gerechtfertigt. Beides ist aber nur in einzelnen Fällen möglich. Im allgemeinen, d. h. ohne dieses vorauszusetzen, argumentiren wir folgendermassen:

Es ist, wie aus (8.) hervorgeht:

$$U_n \;\;= a_{n-1}-b_{n-1}/a_{n-2}-\cdots-b_k/U_k,$$
$$U_{n+1} = a_n-b_n/a_{n-1}-\cdots-b_{k+1}/U_{k+1}.$$

Ist nun U_{k+1} in gleicher Art von $k+1$ abhängig, wie U_k von k, so können wir mit vorübergehender Einführung eines Functionszeichens φ unzweifelhaft gleichzeitig:

$$(11.) \qquad U_n = \varphi(n, k), \quad U_{n+1} = \varphi(n+1, k+1)$$

setzen. Damit ist das Hypothetische scheinbar von n auf k verschoben, aber eben nur *scheinbar*. Wir betrachten k als eine im Endlichen fest gegebene Zahl, hingegen n als eine, welche über alle Grenzen wachsen kann. Dann sondern wir durch näheres Eingehen auf die Functionalgleichung (10.) im gegebenen Falle diejenigen Terme von U_n, welche mit wachsendem n nicht verschwinden, von den mit wachsendem n verschwindenden ab, und versuchen den Nachweis zu führen, dass der Werth von U_k auf die ersteren ohne Einfluss bleibt. Gelingt dieser Nachweis, so können wir in (11.) in den Functionszeichen das k, bez. $k+1$ mit um so grösserem Rechte fortlassen, je grösser n ist, und die aufgestellte Hypothese ist gerechtfertigt. Der in Aussicht gestellte Nachweis ist noch in anderer Beziehung wichtig. Fassen wir in den Begriff der „*Convergenz im weiteren Sinne*" eines Kettenbruchs die beiden Verhaltungsarten desselben zusammen: *entweder* sich einer bestimmten endlichen Grenze mit wachsendem n mehr und mehr zu nähern, *oder* in bestimmter Art der Unendlichkeit zuzustreben, so ist es (ähnlich wie bei einer unendlichen Reihe) an sich klar, dass die Convergenz im weiteren Sinne eines Kbrs. oder dessen Oscillation nicht von den ersten Theilzählern oder Theilnennern abhängt. Also darf auch in dem in den Kriterien auftretenden $U_n\left(=\frac{Q_n}{Q_{n-1}}\right)$ keine merkliche Spur der genannten Anfangsgrössen sich finden.

§ 2.

Specielles Problem, Unterscheidung der drei Hauptfälle.

Wir wenden uns nun, allgemeinere Untersuchungen auf diesem Gebiete für später uns vorbehaltend, dem specielleren Thema vorliegenden Aufsatzes, nämlich dem Kettenbruch

$$X = 1/a_1 - b_2/a_2 - b_3/a_3 - \cdots \tag{12.}$$

zu, dessen Theilnenner und Theilzähler durch folgende Formeln gegeben sind:

$$a_n = \alpha_0 n + \alpha_1, \quad b_n = \beta_0 n^2 + \beta_1 n + \beta_2. \qquad \alpha_0 > 0, \ \beta_0 > 0^{*)} \tag{13.}$$

Diese Werthe von a_n und b_n setzen wir nun in die Gleichung

$$U_n(U_{n+1} - a_n) + b_n = 0 \tag{10.}$$

ein, und substituiren für U_n einen Ausdruck von der Form

$$U_n = An + B + \frac{B_1}{n} + \frac{B_2}{n^2} + \cdots. \tag{14.}$$

Dadurch ergiebt sich für A die quadratische Gleichung

$$A^2 - \alpha_0 A + \beta_0 = 0 \tag{15.}$$

und sodann

$$B = \frac{(\beta_0 - \beta_1) - A(\alpha_0 - \alpha_1)}{2A - \alpha_0}, \tag{16.}$$

$$B_1 = -\frac{B(A + B - \alpha_1) + \beta_2}{2A - \alpha_0}, \tag{17.}$$

$$B_2 = -\frac{B_1(2B - \alpha_1)}{2A - \alpha_0}, \text{ etc.}$$

Man erhält Coefficienten soviel man will, aber dieselben wachsen schneller als die Glieder irgend einer steigenden geometrischen Reihe, sodass (14.), so gross man auch n annehmen möchte, immer divergent bliebe. Aber auch von vornherein sieht man, dass U_n nicht aus der Gl. (10.) allein bestimmbar, also auch nicht entwickelbar sein kann, da es, so lange n endlich bleibt, von einem U_k, dem man einen beliebigen Werth ertheilen darf, abhängig ist.

Wir müssen nun aber für die weitere Betrachtung der Natur der Gl. (15.) nach drei Hauptfälle unterscheiden. Dieselbe hat entweder zwei reelle, von einander verschiedene, positive Wurzeln, oder zwei complexe oder zwei gleiche positive Wurzeln.

*) Ganz am Schlusse sollen α_0 und β_0 gleich Null gesetzt werden.

Erster Hauptfall.

Die Gl. (15.) *hat zwei reelle von einander verschiedene positive Wurzeln.*

§ 3.

Die Fundamentalgleichung.

Da der Nenner der rechten Seiten der Gleichungen (16.) und (17.) $(2A-\alpha_0)$ von Null verschieden ist, können wir setzen:

$$U_n = An+B+\frac{B_1}{n}f(n)$$

oder, wenn wir die Abkürzungen γ, c_0 und (für später) g:

$$(18.)\qquad \begin{cases} \gamma = B(A+B-\alpha_1)+\beta_2, \\ c_0 = 2A-\alpha_0, \\ g = \alpha_1-A-B \end{cases}$$

einführen:

$$(19.)\qquad U_n = An+B-\frac{\gamma}{c_0}\cdot\frac{1}{n}f(n).$$

Durch die Einführung der neuen Function $f(n)$, auf welche der Einfluss von U_k beschränkt wird*), ist zugleich die Möglichkeit einer Correctur geschaffen, falls die Annahme der Summe $An+B$ als Ausdruck für den ***Hauptbestandtheil*** von U_n unrichtig sein sollte. Setzen wir diesen Ausdruck für U_n und den entsprechenden

$$U_{n+1} = An+A+B-\frac{\gamma}{c_0}\frac{f(n+1)}{n+1}$$

in (10.) ein, so verschwinden den Gleichungen (15.) und (16.) zufolge die Glieder mit n^2 und n, und wir erhalten nach geringen Umformungen unsere Fundamentalgleichung

$$(20.)\qquad f(n+1) = \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)\left\{\left(A-c_0+\frac{g}{n}\right)f(n)+c_0\right\}}{A+\frac{B}{n}-\frac{\gamma}{c_0}\cdot\frac{f(n)}{n^2}} = \frac{Z}{N},$$

*) sodass also bei $f(n)$ wie bei $f(n+1)$ noch ein zweites Argument k zu ergänzen ist.

wobei noch bemerkt werde, dass $A-c_0=\alpha_0-A$ immer positiv ist, und wo Z und N Abkürzungen für den Zähler und den Nenner sind*).

Wir bezeichnen die grössere Wurzel der Gl. (15.) mit A', die kleinere mit A'', dem A' entspreche B', γ', g', dem A'' entspreche B'', γ'', g''; ferner sei

$$c = A'-A''. \tag{21.}$$

Ist $A=A'$, so ist c_0 positiv und zwar $=A'-A''=c$; ist $A=A''$, so ist c_0 negativ $=A''-A'=-c$.

Versieht man in (16.) die Buchstaben A und B einmal mit einem und dann mit zwei Strichen und nimmt noch die aus (15.) folgenden Gleichungen:

$$A'+A''=\alpha_0, \quad A'A''=\beta_0$$

hinzu, so kann man $\alpha_0\alpha_1\beta_0\beta_1$ in folgender Art rational durch $A'A''B'B''$ ausdrücken:

$$\begin{cases} \alpha_0=A'+A'', & \alpha_1=A'+A''+B'+B'', \\ \beta_0=A'A'', & \beta_1=A'B''+A''B'+A'A'', \end{cases} \tag{22.}$$

dazu kommt noch aus (18.):

$$\begin{cases} \beta_2 = B'(A''+B'')+\gamma', \\ \beta_2 = B''(A'+B')+\gamma'', \end{cases} \tag{22$_a$.}$$

woraus

$$\gamma'-\gamma'' = A'B''-A''B' \tag{22$_b$.}$$

und

$$\begin{cases} g' = A''+B'', \\ g'' = A'+B'. \end{cases} \tag{22$_c$.}$$

Die beiden Grössencomplexe α_0, α_1, β_0, β_1 und A', A', B', B'' folgen also mittels (15.) und (16.), bez. mittels (22.) unzweideutig aus einander, und man kann also statt des ersteren auch den zweiten in die weitere Untersuchung eingehen lassen, was geschehen soll. Ebenso kann γ' oder γ'' statt β_2 eingeführt werden. — Die Bezeichnungen g' und g'' behalten wir als Abkürzungen bei.

---

*) Diese Gleichung ist ein Specialfall einer anderen, deren anderartigen Specialisirungen wir später (beim dritten Hauptfalle) begegnen werden. Wir könnten die folgenden Betrachtungen auch an diese allgemeinere Gleichung anknüpfen, ziehen es aber vor, von der obigen auszugehen, um den Zusammenhang nicht zu unterbrechen und um die Gedanken zu fixiren.

§ 4.

Discussion der Fundamentalgleichung.

Bei der Discussion der Gl. (20.) behalten wir uns vor, den kleinsten Werth von n (von dem wir ausgehen) so gross anzunehmen, als es für die Präcision der Resultate zweckmässig scheint, weil bei Untersuchungen über Convergenz im weiteren Sinne eines Kettenbruches ebenso von jedem im Endlichen gelegenen Theilbruch ausgegangen werden kann, wie von jedem im Endlichen gelegenen Gliede bei der Untersuchung einer unendlichen Reihe (vergl. oben § 1 am Ende).

Wir unterscheiden bezüglich der Vorzeichen von c_0 und γ vier Fälle, die wir gesondert betrachten müssen:

a) c_0 und γ positiv; b) c_0 positiv, γ negativ;
c) c_0 und γ negativ; d) c_0 negativ, γ positiv.

Ad a). c_0 positiv $= c$; also haben (siehe den Text hinter Gl. (21.)) A, B, g, γ die Bedeutungen A', B', g', γ', deren letztes positiv vorausgesetzt wird.

Es giebt bei gegebenem n zwei positive Werthe von $f(n)$, für welche $f(n+1) = f(n)$ ist; wir nennen, $f(n)$ abkürzungsweise als y bezeichnend, den kleineren Werth y_1, den grösseren y_2 und stellen die Gleichung für y auf. Sie lautet, da Z/N der allgemeine Ausdruck für $f(n+1)$ ist:

$$\frac{Z}{N} = y \quad \text{oder} \quad Y \equiv Z - Ny = 0,$$

das ist:

$$(23.)\quad \left\{ \begin{aligned} \frac{c}{\gamma} n^2 Y = y^2 - \frac{c^2}{\gamma} n(n+1)\Big(1 - \frac{A-B}{c}\cdot\frac{1}{n+1} - \frac{g}{c}\cdot\frac{1}{n}\Big) y \\ + \frac{c^2}{\gamma} n(n+1) = 0. \end{aligned} \right.$$

Ihre Wurzeln sind, bei Einführung des Ausdrucks Θ, der bei genügend grossem n zum positiven oder negativen echten Bruche wird:

$$(24.)\qquad \Theta = \frac{A-B}{c}\cdot\frac{1}{n+1} + \frac{g}{c}\cdot\frac{1}{n}$$

oder auch

$$(24_a.)\qquad \Theta = \frac{A-B+g}{c}\cdot\frac{1}{n} - \frac{A-B}{c}\cdot\frac{1}{n(n+1)}$$

folgende:

$$(25.)\quad \begin{cases} y_1 = n(n+1)\dfrac{c^2}{2\gamma}(1-\Theta)\left\{1-\sqrt{1-\dfrac{4\gamma}{c^2n(n+1)(1-\Theta)^2}}\right\}, \\ y_2 = n(n+1)\dfrac{c^2}{2\gamma}(1-\Theta)\left\{1+\sqrt{1-\dfrac{4\gamma}{c^2n(n+1)(1-\Theta)^2}}\right\}, \end{cases}$$

oder wenn n sehr gross ist:

$$(26.)\qquad y_1 = \frac{1}{1-\Theta},\quad y_2 = n(n+1)\frac{c^2}{\gamma}(1-\Theta)-\frac{1}{1-\Theta}.$$

(27.) Liegt y zw. 0 und y_1, so ist $Y > 0$, $\frac{Z}{N} > y$, $f(n+1) > f(n)$;

(28.) „ y „ y_1 „ y_2, „ „ $Y < 0$, $\frac{Z}{N} < y$, $f(n+1) < f(n)$;

(29.) „ y „ y_2 „ ∞ „ „ $Y > 0$, $\frac{Z}{N} > y$, $f(n+1) > f(n)$.

Ist $y = f(n) = 0$, so ist

$$f(n+1) = \frac{c}{A}\cdot\frac{1+\frac{1}{n}}{1+\frac{B}{A}\cdot\frac{1}{n}}$$

also, bei hinreichend grossem n, nahe $\frac{c}{A}$ oder $\frac{A'-A''}{A'}$ d. i. < 1 und deshalb, nach (26.), $< y_1$.

Ist $f(n)$ negativ $= -f_1(n)$ und

$$f_1(n) \lesseqgtr \frac{c}{A-c+\frac{g}{n}},$$

so folgt aus (20.)

$$f(n+1) = 0 \text{ oder } f(n+1) < \frac{c}{A},$$

indem wir n so gross voraussetzen, dass der Factor $\left(1+\frac{1}{n}\right)$ und der Summand $\frac{B}{n}$ die Werthe des Zählers, bez. des Nenners nur wenig zu alteriren im Stande sind.

Ist $f(n)$ negativ $= -f_1(n)$ und

$$f_1(n) > \frac{c}{A-c+\frac{g}{n}},$$

so ist $f(n+1)$ negativ $= -f_1(n+1)$ und

$$(30.)\quad \left\{ f_1(n+1) = \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)\left\{\left(A-c+\frac{g}{n}\right)f_1(n)-c\right\}}{A+\frac{B}{n}+\frac{\gamma}{c}\frac{f_1(n)}{n^2}} = \frac{Z_1}{N_1}, \right.$$

wo Z_1 und N_1 wieder Zähler und Nenner bedeuten. Dann ist, mit $f_1(n) = \eta$

$$n^2 Y \equiv n^2(N_1\eta - Z_1) = \frac{\gamma}{c}\eta^2 + n(n+1)c(1-\Theta)\eta + n(n+1)c,$$

also für jedes positive η auch Y_1 positiv, daher

$$\frac{Z_1}{N_1} < \eta, \quad f_1(n+1) < f_1(n);$$

d. h. $f_1(n)$ nimmt mit wachsendem n ab.

Wir nehmen nun an, $f(n)$ sei für ein bestimmtes n, $n = n_0$, beliebig gegeben, und wollen sehen, wie sich dieser Anfangswerth bei wachsendem n weiter entwickelt. Dabei wollen wir die mit n ebenfalls sich ändernden y_1 und y_2 als $\overset{n}{y}_1$ und $\overset{n}{y}_2$ bezeichnen.

Hat $f(n_0)$, der Anfangswerth von $f(n)$, den Werth Null oder irgend einen negativen Werth, so gelangt $f(n)$ bei wachsendem n, über Null hinaus wachsend, in das Intervall 0 bis $\overset{n}{y}_1$.

Ist $f(n_0)$ positiv und liegt in dem Intervall zwischen 0 und $\overset{n_0}{y}_1$, so wächst wegen (27.) $f(n)$ mit wachsendem n, bis $\overset{n}{y}_1$ gerade erreicht oder eben (d. h. bei der letzten Operation) überschritten ist; im letzteren Falle wird wegen (28.) $f(n)$ bei wachsendem n wieder abnehmen. Ferner kann $\overset{n}{y}_1$ bei wachsendem n entweder wachsen oder abnehmen, was hauptsächlich (siehe (26.)) vom Vorzeichen von Θ, d. i. im Wesentlichen (siehe (24_a.)) vom Vorzeichen von $(A-B+g)$ abhängt. Im ersten Falle nähert es sich von unten her, im zweiten von oben her der Einheit. *Wächst* $\overset{n}{y}_1$ mit n und ist $f(n) = \overset{n}{y}_1$, so ist

$$f(n+1) = \overset{n}{y}_1 < \overset{n+1}{y}_1,$$

also wächst $f(n+1)$ weiter, entgegengesetzten Falles nimmt $f(n)$ mit wachsendem n ab. Der Gl. (23.) wird aber für $n = \infty$ durch $y = y_1 = 1$ genügt, also muss schliesslich $f(n)$, unter Umständen oscillirend, mit $\overset{n}{y}_1$ und zugleich mit der Einheit zusammenfallen.

Liegt $f(n_0)$ zwischen $\overset{n_0}{y}_1$ und $\overset{n_0}{y}_2$, so nimmt $f(n)$ der Gl. (28.) wegen ab, und dies ist auch noch der Fall, wenn $f(n_0) = \overset{n_0}{y}_2$ ist, denn es ist dann

$$f(n_0+1) = f(n_0) = \overset{n_0}{y}_2 < \overset{n_0+1}{y}_2;$$

$\overset{n}{y}_2$ wächst nämlich mit n, wie aus (25.) oder (26.) hervorgeht. Befindet $f(n_0)$ sich also in dem genannten Intervall, so wird sich $f(n)$ mit wachsendem n mehr und mehr dem $\overset{n}{y}_1$ nähern und sich dann so verhalten, wie vorher beschrieben wurde.

Das Hauptglied von $\overset{n}{y}_2$ ist nach (26.) $\frac{c^2}{\gamma}n^2$, dasselbe ist kleiner als $\frac{A'c}{\gamma}n^2$; liegt nun $f(n_0)$ zwischen $\overset{n_0}{y}_2$ — aber diesem nicht zu nahe (s. später) — und $\frac{c}{\gamma}n_0^2\left(A'+\frac{B'}{n_0}\right)$, so wächst wegen der Gl. (29.) $f(n)$ mit n, bis die Zahl $\frac{c}{\gamma}n^2\left(A'+\frac{B'}{n}\right)$ überschritten oder gerade erreicht ist; im ersteren Falle wird $f(n+1)$ negativ, worüber früher gesprochen wurde, im zweiten Falle wird $f(n+1) = \infty$ und $f(n+2)$ negativ.

Liegt aber $f(n_0)$ wenig über $\overset{n_0}{y}_2$, so ist allerdings auch $f(n_0+1) > f(n_0)$ aber auch $\overset{n_0+1}{y}_2 > \overset{n_0}{y}_2$, es kann also $f(n_0+1) < \overset{n+1}{y}_2$ sein, und $f(n)$ daher mit wachsendem n abnehmen. *Es muss also einen gewissen Werth von* $f(n_0) > \overset{n_0}{y}_2$ *geben, der Art, dass einerseits* $f(n_0+1)$ *und überhaupt* $f(n)$ *zwar immer oberhalb* $\overset{n+1}{y}_2$, *bez.* $\overset{n}{y}_2$ *bleibt, aber andererseits die relative Entfernung zwischen* $\overset{n}{y}_2$ *und* $f(n) > \overset{n}{y}_2$ *sich nicht soweit vergrössert, um eine Annäherung an* $\frac{c}{\gamma}n^2\left(A'+\frac{B'}{n}\right)$ *zu gestatten.*

Wir wollen diesen Werth von $f(n)$ den ***Ausnahmswerth*** nennen und haben uns in der Folge eingehender mit ihm zu beschäftigen. Solche Ausnahmswerthe treten in allen vier Fällen a) b) c) d) auf und sind für unseren Gegenstand von besonderer Bedeutung.

Bemerkt muss noch werden, dass die Gl. (23.), wenn n zu klein ist, imaginäre oder negative Wurzeln haben kann, z. B. für

$$\frac{A-B}{c} = 5, \quad g = 0, \quad n = 3;$$

dann bleibt Y für jeden positiven Werth von y positiv, $f(n)$ nimmt also so lange zu, bis die Gl. (23.) anfängt, reelle positive Wurzeln zu besitzen. Fassen wir alles Gesagte zusammen, so erkennen wir:

Wenn für ein bestimmtes n, $n = n_0$, der Function $f(n_0)$ irgend ein Werth ausser dem Ausnahmswerth ertheilt wird, so ändert sich die Function derart, dass sie schliesslich von der einen oder der anderen Seite oder oscillirend der Einheit zustrebt. Der Vorgang ist der Bewegung eines Pendels (im widerstrebenden Mittel) nicht unähnlich, das von beliebiger Anfangslage aus schliesslich zur stabilen Gleichgewichtslage gelangt, wenn es sich anfangs nicht gerade in der labilen Gleichgewichtslage befand. — Die Einheit ist der stabilen Gleichgewichtslage, der Ausnahmswerth der labilen zu vergleichen.

Ad b). Der vorliegende Fall (c_0 pos., γ neg.) ist von dem eben behandelten nicht wesentlich verschieden. Wiederum ist:

$$A = A', \quad B = B', \quad g = g', \quad \gamma = \gamma',$$

und setzen wir

$$\gamma = -\gamma'_1, \quad \gamma'_1 > 0,$$

so ist mit wirklicher Substitution von A', B', g' für A, B, g:

$$(31.) \qquad f(n+1) = \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)\left\{\left(A'-c+\frac{g'}{n}\right)f(n)+c\right\}}{A'+\frac{B'}{n}+\frac{\gamma'_1}{c}\frac{f(n)}{n^2}} = \frac{Z}{N},$$

wo Z und N wieder Abkürzungen für Zähler und Nenner sein sollen. Es ist $f(n+1) = f(n)$, wenn (mit $f(n) = y$) die Gleichung

$$Y \equiv Ny - Z = 0$$

oder

$$(32.) \qquad n^2 Y \equiv \frac{\gamma'_1}{c^2}y^2 + n(n+1)(1-\Theta)y - n(n+1) = 0$$

gilt, worin Θ dieselbe Bedeutung wie früher (Gl. (24.)) hat. Diese Gleichung hat eine positive Wurzel y_1 und eine negative — z_2. Ihre Werthe sind:

$$(33.) \begin{cases} y_1 = n(n+1)\dfrac{c^2}{2\gamma'_1}(1-\Theta)\left\{\sqrt{1+\dfrac{4\gamma'_1}{c^2 n(n+1)(1-\Theta)^2}}-1\right\}, \\ z_2 = n(n+1)\dfrac{c^2}{2\gamma'_1}(1-\Theta)\left\{\sqrt{1+\dfrac{4\gamma'_1}{c^2 n(n+1)(1-\Theta)^2}}+1\right\} \end{cases}$$

und für grosse Werthe von n:

$$(34.)\qquad y_1 = \frac{1}{1-\Theta}, \quad z_2 = n(n+1)\frac{c^2}{\gamma_1'}(1-\Theta)+\frac{1}{1-\Theta}.$$

Man kann nun durchaus ähnliche Betrachtungen wie im Falle a) anstellen und gelangt zu demselben Resultat, *dass die Function $f(n)$, wo auch der Anfangswerth $f(n_0)$ gelegen haben mag, schliesslich sich, unter Umständen über $\mp\infty$ hinüber, der Einheit nähert, mit einziger Ausnahme des Falles, dass $f(n_0)$ negativ und sein Absolutwerth um ein gewisses Stück oberhalb $\overset{n_0}{z_2}$ gegeben worden wäre.*

Ad c). c_0 neg. $= -c$, γ neg. $= -\gamma_1$.

Die Bedeutung von A, B, g, γ ist bez. A'', B'', g'', γ'', deren letztes also negativ $= -\gamma_1''$ ist. Dann nimmt die Gl. (20.) die Form an:

$$(35.)\qquad f(n+1) = \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)\left\{\left(A''+c+\frac{g''}{n}\right)f(n)-c\right\}}{A''+\frac{B''}{n}-\frac{\gamma_1''}{c}\frac{f(n)}{n^2}} = \frac{Z}{N}.$$

Die Gleichung für *dasjenige* $f(n) = y_1$ oder y_2, welches gleich $f(n+1)$ ist, lautet:

$$(36.)\ \frac{c}{\gamma_1''}n^2 Y \equiv \frac{cn^2}{\gamma_1''}(Z-Ny) = y^2+\frac{c^2}{\gamma_1''}n(n+1)(1+\Theta_1)y-\frac{c^2}{\gamma_1''}n(n+1) = 0,$$

worin

$$(37.)\qquad \Theta_1 = \frac{A''-B''}{c}\cdot\frac{1}{n+1}+\frac{g''}{c}\cdot\frac{1}{n}$$

oder (vgl. $(24_a.)$):

$$(37_a.)\qquad \Theta_1 = \frac{A''-B''+g''}{c}\cdot\frac{1}{n}-\frac{A''-B''}{c}\cdot\frac{1}{n(n+1)}.$$

Die Gl. (36.) hat eine positive Wurzel y_1 und eine negative $-z_2$. Ihre Werthe sind:

$$(38.)\quad \begin{cases} y_1 = n(n+1)\frac{c^2}{2\gamma_1''}(1+\Theta_1)\left\{\sqrt{1+\frac{4\gamma_1''}{c^2n(n+1)(1+\Theta_1)^2}}-1\right\}, \\ z_2 = n(n+1)\frac{c^2}{2\gamma_1''}(1+\Theta_1)\left\{\sqrt{1+\frac{4\gamma_1''}{c^2n(n+1)(1+\Theta_1)^2}}+1\right\} \end{cases}$$

und für grosse Werthe von n:

$$(39.)\qquad y_1 = \frac{1}{1+\Theta_1}, \quad z_2 = n(n+1)\frac{c^2}{\gamma_1''}(1+\Theta_1)+\frac{1}{1+\Theta_1};$$

ist $A''-B''+g''>0$, also auch Θ_1 positiv, so nähert sich y_1 von unten her, im entgegengesetzten Falle von oben her der Einheit.

$$(40.)\begin{cases}\text{Liegt } y \text{ zw. } 0 \text{ u. } y_1, \text{ so ist } Y<0, \ \frac{Z}{N}<y, \ f(n+1)<f(n),\\ \text{,, } y \text{ ,, } y_1 \text{ ,, } \infty, \text{ ,, } Y>0, \ \frac{Z}{N}>y, \ f(n+1)>f(n).\end{cases}$$

Ist $f(n)$ neg. $=-f_1(n)$, so auch $f(n+1)=-f_1(n+1)$ und zwar:

$$(41.)\qquad f_1(n+1)=\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)\left\{\left(A''+c+\frac{g''}{n}\right)f_1(n)+c\right\}}{A''+\frac{B''}{n}+\frac{\gamma_1''}{c}\frac{f_1(n)}{n^2}}=\frac{Z_1}{N_1}.$$

Die linke Seite wird gleich der rechten, wenn $f_1(n)=\eta$, für die positive Wurzel der Gleichung

$$Y_1\equiv N_1\eta-Z_1 = 0,$$

d. i.

$$(42.)\qquad \frac{c}{\gamma_1''}n^2Y_1 = \eta^2-\frac{c^2}{\gamma_1''}n(n+1)(1+\Theta_1)\eta-\frac{c^2}{\gamma_1''}n(n+1)=0.$$

Wie aus dem Vergleich dieser Gleichung mit (36.) folgt, ist die positive Wurzel derselben identisch mit dem obigen z_2 und es ist:

$$(43.)\begin{cases}\text{für } \eta \text{ zw. } 0 \text{ und } z_2: Y_1<0, \ \frac{Z_1}{N_1}>\eta, \ f_1(n+1)>f_1(n),\\ \text{,, } \eta \text{ ,, } z_2 \text{ ,, } \infty: Y_1>0, \ \frac{Z_1}{N_1}<\eta, \ f_1(n+1)<f_1(n).\end{cases}$$

Wir können nunmehr folgende Schlüsse machen: Ist $f(n_0)$ negativ $=-f_1(n_0)$ gegeben und liegt $f_1(n_0)$ unterhalb $\overset{n_0}{z}_2$, so wächst $f_1(n)$ so lange bis $f_1(n)$ den Werth $\overset{n}{z}_2$ erreicht oder eben (d. h. bei der letzten Operation) überschritten hat, im letzteren Falle nimmt $f_1(n)$, der zweiten (43.) wegen, ab, im ersteren aber weiter zu, weil dann

$$f_1(n+1)=f_1(n)=\overset{n}{z}_2<\overset{n+1}{z}_2$$

ist. Ebenso nimmt $f_1(n)$ ab, wenn ursprünglich $f_1(n_0)>\overset{n_0}{z}_2$ gegeben ist.

Die Function $f_1(n)$ convergirt also von beiden Seiten nach einem in der Nähe von $\overset{n}{z}_2$ gelegenen Werthe) und wird schliesslich unendlich proportional n^2, nämlich $=\frac{c^2}{\gamma_1''}n^2$.*

---

*) Derselbe wird am Ende dieses Paragraphen genauer bestimmt.

Ist $f(n_0)$ Null oder positiv, aber unterhalb $c:\left(A''+c+\frac{g''}{n}\right)$, so ist $f(n_0+1)$ negativ; ist $f(n_0)$ gleich $c:\left(A''+c+\frac{g''}{n}\right)$, so ist $f(n_0+1)=0$, $f(n_0+2)$ negativ, wie dies alles aus (35.) ersichtlich ist. Liegt $f(n_0)$ zwischen dem echten Bruche $c:\left(A''+c+\frac{g''}{n}\right)$ und dem nahe an 1 gelegenen $\overset{n_0}{y}_1$, so findet der ersten (40.) wegen Abnahme von $f(n)$ mit wachsendem n statt. Sei nun $A''-B''+g''>0$ und somit (wenn n nicht zu klein ist) Θ_1 positiv und daher $\overset{n_0}{y}_1<1$ (siehe oben nach (39.)), dann wächst $\overset{n}{y}_1$ mit n; ist also $f(n_0)=\overset{n_0}{y}_1$ gegeben, so ist

$$f(n_0+1)=f(n_0)=\overset{n_0}{y}_1<\overset{n_0+1}{y}_1,$$

also findet auch in diesem Grenzfalle Abnahme von $f(n)$ mit wachsendem n statt. Ist $f(n_0)=1$, so ist angenähert

$$f(n_0+1) \;=\; 1+\frac{A''-B''+g''}{A''}\cdot\frac{1}{n},$$

daher grösser als 1, also wächst dann $f(n)$ mit wachsendem n.

Ist umgekehrt $A''-B''+g''$, also Θ_1 negativ und daher $\overset{n}{y}_1>1$, so findet, wenn $f(n_0)=1$ gegeben ist, aus dem angegebenen Grunde Abnahme statt; ist aber $f(n_0)=\overset{n_0}{y}_1$ gegeben, so ist

$$f(n_0+1)=f(n_0)=\overset{n_0}{y}_1>\overset{n_0+1}{y}_1,$$

also findet, der zweiten (40.) wegen, zunächst Zunahme statt; da aber $\overset{n}{y}_1$ mit wachsendem n abnimmt, so bleibt $f(n)>\overset{n}{y}_1$, also dauert die Zunahme an. In beiden Fällen ($\Theta_1>0$ oder $\Theta_1<0$) giebt es zwischen $\overset{n}{y}_1$ und 1 einen (später zu bestimmenden) Grenzwerth oder ***Ausnahmswerth***, von welchem ausgehend $f(n)$ sich nicht merklich ändert. Ist $f(n_0)>1$ (bez. $>\overset{n_0}{y}_1$) gegeben, so findet, der zweiten (40.) wegen, Zunahme von $f(n)$ mit wachsendem n statt, und zwar bis der Werth

$$f(n) \;=\; \frac{c}{\gamma_1''}n^2\left(A''+\frac{B''}{n}\right)$$

erreicht oder eben überschritten ist; im ersten Falle ist $f(n+1)=\infty$, $f(n+2)$ negativ, im zweiten Falle $f(n+1)$ schon negativ, und wir können die Untersuchungen nunmehr in folgendes Endresultat zusammenfassen:

Wenn für ein bestimmtes n_0 der Function $f(n_0)$ irgend ein Werth ausser dem Ausnahmswerth ertheilt wird, so strebt sie schliesslich der negativen Unendlichkeit derart zu, dass $f(n):n^2$ einen bestimmten endlichen Werth hat. **Man darf nun wohl diese wieder dem *stabilen,* und den in der Nähe der Einheit gelegenen *Ausnahmswerth* mit dem *labilen Gleichgewicht* eines Körpers vergleichen, in welches er nimmer hineinstrebt und von welchem die geringste Abweichung ihn in stets heftiger werdende Bewegung versetzt. —**

Ad d). Dieser letzte Fall, in welchem c_0 neg. $= -c$, γ pos. ist, und $A, B, g, \gamma =$ bez. $A'' B'' g'' \gamma''$ sind, unterscheidet sich wiederum nicht wesentlich von dem vorangehenden. Es ist

$$(44.)\qquad f(n+1) = \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)\left\{\left(A''+c+\frac{g''}{n}\right)f(n)-c\right\}}{A''+\frac{B''}{n}+\frac{\gamma''}{c}\frac{f(n)}{n^2}} = \frac{Z}{N}.$$

Setzen wir wieder $f(n) = y$, so wird $f(n+1) = f(n)$ für die Wurzeln der Gleichung

$$Y \equiv Ny - Z = 0,$$

d. i. mit Benutzung der in (37.) definirten Bezeichnung Θ_1:

$$n^2\frac{c}{\gamma''}Y = y^2 - \frac{c^2}{\gamma''}n(n+1)(1+\Theta_1)y + \frac{c^2}{\gamma''}n(n+1) = 0.$$

Die Wurzeln derselben sind positiv und haben die Werthe

$$(45.)\quad \begin{cases} y_1 = n(n+1)\frac{c^2}{2\gamma''}(1+\Theta_1)\left\{1-\sqrt{1-\frac{4\gamma''}{c^2 n(n+1)(1+\Theta_1)^2}}\right\}, \\ y_2 = n(n+1)\frac{c^2}{2\gamma''}(1+\Theta_1)\left\{1+\sqrt{1-\frac{4\gamma''}{c^2 n(n+1)(1+\Theta_1)^2}}\right\} \end{cases}$$

und für grosse Werthe von n:

$$(46.)\qquad y_1 = \frac{1}{1+\Theta_1},\quad y_2 = n(n+1)\frac{c^2}{\gamma''}(1+\Theta_1) - \frac{1}{1+\Theta_1}.$$

Ist $f(n)$ neg. $= -f_1(n)$, so ist (so lange der Nenner von (44.) positiv bleibt) $f(n+1)$ auch neg. $= -f_1(n+1)$, die Gleichung für $f_1(n) = \eta$ hat keine positiven Wurzeln und man gelangt nun durch ganz analoge Schlüsse wie bei c) zu dem Resultat:

Es giebt einen sehr nahe $\overset{n_0}{y_1}$ liegenden, aber nicht mit $\overset{n_0}{y_1}$ zusammenfallenden Werth von $f(n_0)$, welcher bei wachsendem n sich wenig ändert und

der Einheit zustrebt. Wird dem $f(n_0)$ ein beliebiger anderer, von diesem Ausnahmswerth verschiedener Werth, zuertheilt, so ändert sich die Function $f(n)$ derart, dass sie schliesslich proportional mit n^2 unendlich wird.

Wir haben nun noch diesen Endwerth von $f(n)$ genauer zu bestimmen. Derselbe liegt gleicher Art in der Nähe von $\overset{n}{y}_2$, wie im Fall c) $f_1(n)$ in der Nähe von $\overset{n}{z}_2$, und beides kommt in der That auf dasselbe hinaus, denn es ist $f_1(n) = -f(n)$ und $\overset{n}{z}_2$ (siehe (38.)), wenn man darin $-\gamma''$ für γ_1'' zurücksetzt, gleich $-\overset{n}{y}_2$ (siehe (45.)). Da nun $\overset{n}{y}_2$ mit $\frac{c^2}{\gamma''}n^2$ beginnt, setzen wir

$$(47.)\qquad f(n) = \frac{c^2}{\gamma''}n^2+pn+q,$$

wodurch wir die mit wachsendem n nicht verschwindenden Glieder zu berechnen im Stande sind. Diesen Ausdruck und den entsprechenden für $f(n+1)$ setzen wir in (35.) d. i. in

$$(48.)\qquad f(n+1) = \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)\left\{\left(A''+c+\frac{g''}{n}\right)f(n)-c\right\}}{A''+\frac{B''}{n}+\frac{\gamma''}{c}\frac{f(n)}{n^2}}$$

ein, und erhalten dadurch die Gleichung

$$\begin{aligned}&\left\{\frac{c^2}{\gamma''}n^2+\left(\frac{2c^2}{\gamma''}+p\right)n+\left(\frac{c^2}{\gamma''}+p+q\right)\right\}\\ &\times\left\{A'+\left(B''+\frac{\gamma''}{c}p\right)\cdot\frac{1}{n}+\frac{\gamma''}{c}\cdot\frac{q}{n^2}\right\}\\ &=\left(1+\frac{1}{n}\right)\left\{\left(A'+\frac{A'+B'}{n}\right)\left(\frac{c^2}{\gamma''}n^2+pn+q\right)-c\right\}.\end{aligned}$$

Die Vergleichung der Coefficienten von n^2 giebt eine identische Gleichung, der Vergleich derjenigen von n^1 und n^0 liefert bezüglich

$$p = \frac{c}{\gamma''}(B'-B''),\quad q = \frac{A''B'-A'B''-\gamma''}{\gamma''}$$

d. i. nach (22_b.):

$$q = -\frac{\gamma'}{\gamma''}$$

und somit

$$(49.)\qquad f(n) = \frac{c^2}{\gamma''}n^2+\frac{c}{\gamma''}(B'-B'')n-\frac{\gamma'}{\gamma''}.$$

Dies ist also der Grenzwerth, dem sich $f(n)$ in den Fällen c) und d) im *allgemeinen,* d. h. abgesehen vom Ausnahmswerthe nähert.

§ 5.

Die Ausnahmswerthe.

Wir suchen zuerst den Ausnahmswerth in den Fällen c) und d), den wir mit $\varphi(n)$ bezeichnen. Wir wissen, dass er nahe an $\overset{n}{y}_1$, und daher auch nahe an 1 liegen muss, d. h. dass irgend eine Function $\varphi(n)$, welche merklich von $\overset{n}{y}_1$ oder von 1 abweicht, nicht zu dem Endwerthe $\varphi(\infty)=1$ führen kann. Wir stellen nun die Vorfrage: Wird durch die Annahme $\varphi(\infty)=1$ eine Function $\varphi(n)$ erzielt, die nicht nur wenig von $\overset{n}{y}_1$ entfernt ist, sondern den Grad dieser Abweichung präcise erkennen lässt? Wir sind dabei nach den vorangehenden Betrachtungen berechtigt und gezwungen, die Form der Function $\varphi(n)$ folgendermassen:

$$(50.)\qquad \varphi(n) = 1+\frac{d_1}{n}+\frac{d_2}{n^2}+\cdots$$

anzunehmen*) und die Nachprüfung ihrer Strenge beruht darin, *widerspruchslos* unter der gemachten Voraussetzung die Coefffcienten in (50.) wenigstens den ersten d_1 bestimmen zu können.

Wir gehen von der Gl. (35.) aus und vernachlässigen darin das

---

*) Wäre nämlich z. B. $A''-B''+g''$ positiv $=p$, also (siehe (39.) und (37_a.))

$$\overset{n}{y}_1 = \frac{1}{1+\Theta_1} = 1-\frac{p}{n}$$

und etwa

$$\varphi(n) = 1-\frac{q}{\sqrt{n}},$$

so müsste, da $\varphi(n)$ zwischen 1 und $\overset{n}{y}_1$ liegt:

$$\frac{q}{\sqrt{n}} < \frac{p}{n},\quad q<\frac{p}{\sqrt{n}}$$

sein; diese Ungleichung kann aber nur bis zu einer gewissen Grenze von n stattfinden, für grössere Werthe von n müsste also $\varphi(n)$ aus dem Intervall $1\ldots\overset{n}{y}_1$ heraustreten, was mit der Annahme im Widerspruch steht.

Glied 2ter Ordnung $\varphi(n):n^2$; dann erhalten wir daraus:

$$(51.)\qquad \varphi(n) = \frac{A''+\frac{B''}{n}}{\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(A''+c+\frac{g''}{n}\right)}\varphi(n+1)+\frac{c}{A''+c+\frac{g''}{n}}.$$

Dividiren wir und behalten nur Glieder 0-ter und 1-ter Ordnung bei, so entsteht, wenn zur Abkürzung

$$(52.)\qquad p = \frac{c}{A''+c},\quad q = \frac{A''}{A''+c},\; p+q = 1$$

gesetzt wird:

$$(53.)\quad \varphi(n) = q\left\{1+\left(\frac{B''}{A''}-1-\frac{g''}{A''+c}\right)\cdot\frac{1}{n}\right\}\varphi(n+1)+p\left(1-\frac{g''}{A''+c}\cdot\frac{1}{n}\right).$$

In dieser Gleichung setzen wir succesive $n+1$, $n+2$, $n+3$, ... an Stelle von n und eliminiren $\varphi(n+1)$, $\varphi(n+2)$, ..., soweit diese Functionen mit Grössen, die von n unabhängig, multiplicirt sind, indem wir Gl. (53.) und die aus ihr entstehenden mit bez. $1, q, q^2, q^3, \dots$ multipliciren und addiren. Dadurch erhalten wir:

$$(54.)\ \begin{cases} \varphi(n) = p(1+q+q^2+\cdots)-\frac{pg''}{A''+c}\left(\frac{1}{n}+\frac{q}{n+1}+\frac{q^2}{n+2}+\cdots\right) \\ +q\left(\frac{B''}{A''}-1-\frac{g''}{A''+c}\right)\left\{\frac{1}{n}\varphi(n+1)+\frac{q}{n+1}\varphi(n+2)+\frac{q^2}{n+2}\varphi(n+3)+\cdots\right\}. \end{cases}$$

In der letzten Klammer dieser Gleichung sind die Functionen $\varphi(n+1)$, $\varphi(n+2)$, $\varphi(n+3)$, ... wegen (50.) durch 1 zu ersetzen; ferner ist

$$1+q+q^2+\cdots = \frac{1}{1-q} = \frac{1}{p},$$

$$\frac{1}{n}+\frac{q}{n+1}+\frac{q^2}{n+2}+\cdots = \frac{1}{n}(1+q+q^2+\cdots)-\frac{q}{n}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{2q}{n+2}+\frac{3q^2}{n+3}+\cdots\right);$$

die zweite Klammer ist kleiner als

$$\frac{1}{n+1}(1+2q+3q^2+\cdots) = \frac{1}{n+1}\cdot\frac{1}{(1-q)^2} = \frac{1}{n+1}\cdot\frac{1}{p^2},$$

folglich

$$\frac{1}{n}+\frac{q}{n+1}+\frac{q^2}{n+2}+\cdots = \frac{1}{p}\cdot\frac{1}{n}-\frac{q}{p^2}\frac{\vartheta}{n(n+1)},\qquad 0<\vartheta<1$$

daher nach (54.) mit Beibehaltung von Grössen 0-ter und 1-ter Ordnung,

ab, so bleibt

$$(57.)\quad \begin{cases} cn(n+1)(1+\Theta_1)\Delta_n+\frac{\gamma_1''}{c}(2\overset{n}{y}_1+\Delta_n)\Delta_n \\ \qquad = n^2(\overset{n+1}{y}_1-\overset{n}{y}_1+\Delta_{n+1}-\Delta_n)\left(A''+\frac{B''}{n}-\frac{\gamma_1''}{c}\frac{\overset{n}{y}_1+\Delta_n}{n^2}\right). \end{cases}$$

Entwickeln wir $\overset{n}{y}_1$, so erhalten wir in Vervollständigung von (39.):

$$(58.)\qquad \overset{n}{y}_1 = \frac{1}{1+\Theta_1}-\frac{\gamma_1''}{c^2}\frac{1}{n(n+1)(1+\Theta_1)^2},$$

worin, wenn

$$(59.)\qquad C = \frac{A''-B''+g''}{c} = \frac{A''-B''+A'+B'}{A'-A''}$$

(siehe Gl. (22_c.)) gesetzt wird, für Θ_1 auch die Form (siehe Gl. (37_a.)):

$$(59_a.)\qquad \Theta_1 = C\cdot\frac{1}{n}-\frac{A''-B''}{c}\frac{1}{n(n+1)}$$

gewählt werden kann. Aus (58.) folgt $\overset{n+1}{y}_1$, indem $n+1$ an Stelle von n gesetzt wird, und daraus näherungsweise

$$(59_b.)\qquad \overset{n+1}{y}_1-\overset{n}{y}_1 = \frac{C}{n(n+1)}+\cdots \text{ oder auch } = \frac{C}{n^2}+\cdots;$$

also ist $n^2(\overset{n+1}{y}_1-\overset{n}{y}_1)$ eine endliche Grösse.

Da ferner Δ_n und Δ_{n+1} von der 2-ten Ordnung sind, so ist ihre Differenz von der 3-ten und $n^2(\Delta_{n+1}-\Delta_n)$ von der 1-ten Ordnung. Daher ist nach (57.) in erster Annäherung

$$(60.)\qquad \Delta_n = \frac{CA''}{cn^2};$$

hieraus:

$$(61.)\qquad \begin{aligned} \Delta_{n+1}-\Delta_n &= -\frac{CA''}{cn^3}, \\ \frac{\Delta_{n+1}-\Delta_n}{\overset{n+1}{y}_1-\overset{n}{y}_1} &= -\frac{A''}{cn} \end{aligned}$$

und also, wenn wir die endliche Grösse:

$$(62.)\qquad n^2\left(\overset{n+1}{y}_1-\overset{n}{y}_1\right)\left(A''+\frac{B''}{n}\right) = R$$

setzen, in zweiter Annäherung:

$$\Delta_n = \frac{R}{cn(n+1)(1+\Theta_1)}\left(1-\frac{A''}{cn}\right). \tag{63.}$$

So könnte man successive Δ_n immer genauer bestimmen. Bei der nächsten Annäherung müsste auf der rechten Seite von (57.) das, theilweise von links herüber geschaffte, Glied

$$-\frac{\gamma_1}{c}\left\{n^2\left(\overset{n+1}{y_1}-\overset{n}{y_1}\right)\frac{\overset{n}{y_1}}{n^2}+2\overset{n}{y_1}\Delta_n\right\} = -\frac{\gamma_1}{c}\cdot C\frac{A'+A''}{A'-A''}\cdot\frac{1}{n^2}$$

berücksichtigt werden. Da dieses von der 2-ten Ordnung ist und auch zur rechten Seite von (61.) nur ein Glied 2-ter Ordnung als Correctur hinzutreten kann, so kann der zu (63.) hinzutretende corrigirende Factor sich auch von 1 nur um ein Glied 2-ter Ordnung unterscheiden, u. s. w.

Wir haben also das Resultat

$$\varphi(n) = \overset{n}{y_1}+\frac{R\left(1-\frac{A''}{cn}\right)}{cn(n+1)(1+\Theta_1)} \tag{64.}$$

oder, weniger genau:

$$\varphi(n) = \overset{n}{y_1}+\frac{A''(A'+A''+B'-B'')}{c^2}\cdot\frac{1}{n^2} \tag{65.}$$

($\overset{n}{y_1}$ siehe (38.) oder (58.), in welchen Gleichungen auch $-\gamma''$ statt γ_1'' gesetzt werden kann).

Dieselbe Entwickelung gilt auch für den Fall d), wobei der Unterschied eines positiven und negativen γ'' in $\overset{n}{y_1}$ sich offenbart. Wir bemerken noch:

1.) Wenn $C = \frac{A''-B''+A'+B'}{c}$ positiv ist, so ist auch Θ_1 und R (s. (59_a.), (59_b.) und (62.)) positiv, also ist dann:

$$\overset{n}{y_1} < 1,\ \varphi(n) > \overset{n}{y_1},\ \text{daher}\ \overset{n}{y_1} < \varphi(n) < 1;$$

ist hingegen C negativ, so auch Θ_1 und R, also

$$\overset{n}{y_1} > 1,\ \varphi(n) < \overset{n}{y_1},\ \text{daher}\ \overset{n}{y_1} > \varphi(n) > 1;$$

in beiden Fällen liegt also $\varphi(n)$ *zwischen* $\overset{n}{y}_1$ *und* 1, *wie bereits in* § 4 *Fall* c) (S. 150 Z. 9 v. u.) *erkannt worden, aber näher an* $\overset{n}{y}_1$.

2.) Die ganze Betrachtung über $\varphi(n)$ setzt grosse Werthe von n voraus, mindestens so gross, dass $A''+\frac{B''}{n}$ positiv, Θ_1 ein echter Bruch, $\overset{n}{y}_1$ reell (im Fall d)), und nach dem binomischen Lehrsatz entwickelbar wird etc. Anderenfalls sind die gewonnenen Resultate illusorisch. Wollte man dennoch $\varphi(n)$ für kleinere Werthe von n finden, so müsste man es für genügend grosse Werthe von n aus Gl. (64.) oder (65.) berechnen und dann vermittelst Umkehrung der Gl. (35.) schrittweise zurückverfolgen — eine Procedur, welche sich theoretischer Betrachtung entzieht, auch für unseren Zweck unnütz wäre.

Eine andere Frage ist es, ob für specielle Werthe der Constanten $A', A'', B', B'', \gamma''$ die Function $\varphi(n)$ eine rationale geschlossene Form annehmen kann. Die Antwort ist bejahend, und haben wir dieser Frage einen besonderen Aufsatz gewidmet, dessen Resultate hier an betreffender Stelle (§ 8.), soweit erforderlich, reproducirt werden sollen.

§ 6.

Die Ausnahmswerthe.
Fortsetzung.

Wir gehen nunmehr daran, den Ausnahmswerth der Fälle a) und b) zu bestimmen. Wir bezeichnen ihn mit $F(n)$ und setzen, da er in der Nähe von $\overset{n}{y}_2$ d. i. von $\frac{c^2}{\gamma'}n^2+\cdots$ (siehe (26.)) liegt:

$$F(n) = \frac{c^2}{\gamma'}n^2+p'n+q'.$$

Dieser Werth und der entsprechende für $F(n+1)$ ist in (20.) mit $A, B, g, \gamma = A', B', g', \gamma'$ also in:

$$F(n+1) = \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)\left\{\left(A'-c+\frac{g'}{n}\right)F(n)-c\right\}}{A'+\frac{B'}{n}-\frac{\gamma'}{c}\frac{F(n)}{n^2}}$$

einzusetzen. Diese Gleichung unterscheidet sich aber von Gl. (48.) nur dadurch, dass hier die einfach gestrichenen Buchstaben an Stelle der dortigen zweifach gestrichenen stehen und dass hier c das entgegengesetzte

Vorzeichen wie dort hat. Da sich ausserdem das Anfangsglied von $F(n)$ in gleichem Sinne von dem Anfangsgliede von $f(n)$ in (47.) unterscheidet, so ergiebt sich für den mit wachsendem n nicht verschwindenden Theil von $F(n)$ durch Vergleich mit $f(n)$ in (49.) der Ausdruck

$$F(n) = \frac{c^2}{\gamma'}n^2 - \frac{c}{\gamma'}(B''-B')n - \frac{\gamma''}{\gamma'}$$
$$= \frac{c^2}{\gamma'}n^2 + \frac{c}{\gamma'}(B'-B'')n - \frac{\gamma''}{\gamma'}.$$

Dies ist aber eben nur ein Näherungswerth für $F(n)$, die Gleichung wird genau, wenn man sie

$$(66.)\qquad F(n) = \frac{c^2}{\gamma'}n^2 + \frac{c(B'-B'')}{\gamma'}n - \frac{\gamma''}{\gamma'}\varphi(n)$$

schreibt, wo unter $\varphi(n)$ eine Function zu verstehen ist, die sich mit wachsendem n der 1 nähert. *Diese Function* $\varphi(n)$ *ist aber nichts anderes als der Ausnahmswerth der Fälle* c) *und* d). Um dies zu erkennen, setzen wir in (20.), (worin A, B, γ, g, als bez. A', B', γ', g' aufzufassen sind und daher $c_0 = c$ ist), nach Multiplication derselben mit γ', auf der rechten Seite $F(n)$, oder vielmehr seinen Werth aus (66.) statt $f(n)$, und ebenso statt ihrer linken Seite folgenden Ausdruck:

$$(67.)\quad \gamma' F(n+1) = c^2(n+1)^2 + c(n+1)(B'-B'') - \gamma''\varphi(n+1).$$

Der Nenner der rechten Seite wird dann:

$$(68.)\qquad A' + \frac{B'}{n} - \frac{\gamma'}{c}\frac{F(n)}{n^2} = A'' + \frac{B''}{n} + \frac{\gamma''}{c}\frac{\varphi(n)}{n^2}.$$

Im Zähler ist mit Benutzung von $(22_c.)$:

$$\gamma'\Big(A'-c+\frac{g'}{n}\Big)F(n) = \Big(A''+\frac{A''+B''}{n}\Big)(c^2n^2+cn(B'-B''))$$
$$-\Big(A''+\frac{A''+B''}{n}\Big)\gamma''\varphi(n)$$
$$= \Big(A''+\frac{B''}{n}+\frac{\gamma''}{c}\frac{\varphi(n)}{n^2}\Big)(c^2n^2+cn(B'-B''))$$
$$+A''c(cn+B'-B'') - \gamma''\varphi(n)\Big(A''+c+\frac{A''+B'}{n}\Big);$$

zum vorletzten Gliede addiren wir (siehe $(22_b.)$)

$$\gamma' c = c(A'B''-B'A''+\gamma'')$$

und erhalten $c^2n\left(A''+\frac{B''}{n}\right)+c\gamma''$, dadurch ergiebt sich:

$$\gamma'\left(A'-c+\frac{g'}{n}\right)F(n)+\gamma'c = \left(A''+\frac{B''}{n}+\frac{\gamma''}{c}\frac{\varphi(n)}{n^2}\right)\left(c^2n(n+1)+cn(B'-B'')\right)$$
$$-\gamma''\varphi(n)\left(A''+c+\frac{A'+B'}{n}\right)+c\gamma''$$

folglich:

$$(69.)\left\{\begin{aligned}&\frac{\gamma'\left(1+\frac{1}{n}\right)\left\{\left(A'-c+\frac{g'}{n}\right)F(n)+c\right\}}{A'+\frac{B'}{n}-\frac{\gamma'}{c}\frac{F(n)}{n^2}}\\ &= c^2(n+1)^2+c(n+1)(B'-B'')-\frac{\gamma''\left(1+\frac{1}{n}\right)\left\{\left(A''+c+\frac{g''}{n}\right)\varphi(n)-c\right\}}{A''+\frac{B''}{n}+\frac{\gamma''}{c}\frac{\varphi(n)}{n^2}}\end{aligned}\right.$$

Die linke Seite dieser Gleichung ist aber gleich $\gamma'F(n+1)$, also folgt mittels (67.):

$$(70.)\qquad \varphi(n+1) = \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)\left\{\left(A''+c+\frac{g''}{n}\right)\varphi(n)-c\right\}}{A''+\frac{B''}{n}+\frac{\gamma''}{c}\frac{\varphi(n)}{n^2}};$$

dies ist aber genau die Gl. (56.), aus welcher wir im vorigen Paragraphen die Function $\varphi(n)$ als die einzige entwickelt haben, welche mit wachsendem n sich der 1 nähert. In Gl. (66.) kann also statt $\varphi(n)$ der Ausdruck (64.) oder (65.) gesetzt werden.

§ 7.

Die Auflösungen der Functionalgleichung (10.).

Die Auflösung der Gleichung

$$(10.)\qquad U_n(U_{n+1}-a_n)+b_n = 0$$

war

$$(19.)\qquad U_n = An+B-\frac{\gamma}{c_0}\frac{f(n)}{n}.$$

Hierin kann A die grössere Wurzel der Gl. (15.) A' oder die kleinere A'' bedeuten; die Grössen B, c_0 und γ ergeben sich dann von selbst als B', c und γ' oder als B'', $-c$ und γ''. Dadurch werden wir zu zwei verschiedenen Auflösungen geführt, die wir nun charakterisiren wollen.

Bei der ersten ist der Anfangswerth der Function $f(n)$, d. h. der

Werth derselben für dasjenige n, $n=n_0$, von dem wir ausgehen, völlig willkürlich, wenn nur *ein einziger*, in bestimmter Art von n abhängiger Werth, der *Ausnahmswerth* vermieden wird; bei jedem anderen Anfangswerthe wird, wenn man n successive um je eine Einheit wachsen lässt, die Function $f(n)$ sich schliesslich, vielleicht durch grosse Werthe hindurchgehend, der Einheit und somit U_n mehr und mehr dem Werthe $A'n+B'$ nähern.

Bei der *zweiten* Auflösung *muss* man im Gegentheil dem $f(n)$ den durch (64.) mit grosser Annäherung dargestellten Ausnahmswerth $\varphi(n)$ ertheilen, wenn es sich mit wachsendem n wiederum der Einheit und U_n sich somit dem Werthe $A''n+B''$ nähern soll. Wird aber dem $f(n)$ irgend ein anderer Anfangswerth ertheilt, so nähert es sich schliesslich mehr und mehr dem Werthe $\frac{c^2}{\gamma''}n^2+\frac{c}{\gamma''}(B'-B'')n-\frac{\gamma'}{\gamma''}$ (siehe Gl. (49.) § 4 am Ende) also wird dann:

$$U_n = A''n+B''+\frac{\gamma''}{cn}\left\{\frac{c^2}{\gamma''}n^2+\frac{c}{\gamma''}(B'-B'')n+\cdots\right\}$$
$$= (A''+c)n+B'+\cdots = A'n+B'+\cdots$$

d. h. *die zweite Auflösung schlägt in die erste um.*

Umgekehrt wird *die erste Auflösung bei Einführung des Ausnahmswerthes zur zweiten,* denn es ist dann:

$$U_n = A'n+B'-\frac{\gamma'}{c}\frac{F(n)}{n},$$

d. i. nach (66.):

$$U_n = A'n+B'-\frac{\gamma'}{c}\cdot\frac{1}{n}\left\{\frac{c^2}{\gamma'}n^2+\frac{c}{\gamma'}(B'-B'')n-\cdots\right\}$$
$$= (A'-c)n+B''+\cdots = A''n+B''+\cdots.$$

Es sind also *zwei Auflösungen verschiedenen Charakters vorhanden:*

$$U_n = A'n+B'-\frac{\gamma'}{c}\frac{f(n)}{n} \tag{71.}$$

und

$$U_n = A''n+B''+\frac{\gamma''}{c}\frac{\varphi(n)}{n}. \tag{72.}$$

Die erstere ist die *allgemeine* mit einer willkürlichen Constanten in $f(n)$, die zweite enthält keine willkürliche Constante und ist deshalb als *singuläre* Auflösung zu bezeichnen. Die erste convergirt bei wachsendem

n schliesslich nach $A'n+B'$, die zweite nach $A''n+B''$. So lange verlangt wird, und das muss bei der beabsichtigten Anwendung geschehen, dass der Anfangswerth von $f(n)$ in A', B', A'', B'' rational sei, ist (72.) im allgemeinen kein specieller Fall von (71.), weil $\varphi(n)$ im allgemeinen irrational ist. Nur wenn γ' (oder γ'') in bestimmter Art von A', B', A'', B'', abhängt, ist $\varphi(n)$ rational*) und dann *kann*, aber muss nicht, die zweite Auflösung zum Specialwerthe der ersten werden.

§ 8.

Rationale Werthe von $\varphi(n)$.

Wir haben im vorigen Paragraphen gesehen und werden es weiterhin noch mehr erkennen, dass die Irrationalität oder Rationalität von $\varphi(n)$ für unseren Gegenstand nicht ohne Bedeutung ist. Die Frage ist aber auch an sich von Interesse, und der Verfasser hat sich mit ihr, wie bereits erwähnt, in einer besonderen Arbeit**) beschäftigt, aus welcher hier die für den vorliegenden Zweck belangreichen Resultate angegeben werden sollen.

Soll $\varphi(n)$ oder $\frac{\varphi(n)}{n}$, welches, gleichwie in dem genannten Aufsatze, mit $\psi(n)$ bezeichnet werden möge, rational sein, so kann es, da $\varphi(n)$ sich mit wachsendem n der 1 nähern muss, nur die Form haben:

$$\psi(n) = \frac{n^{\lambda-1}+r_1 n^{\lambda-2}+r_2 n^{\lambda-3}+\cdots+r_{\lambda-1}}{n^{\lambda}+s_1 n^{\lambda-1}+s_2 n^{\lambda-2}+\cdots+s_{\lambda}},$$

---

*) Siehe den folgenden §.

**) Dieses Journal Bd. 119, S. 291—312. — Herr *Woldemar Heymann* hatte die Freundlichkeit, mir mitzutheilen, dass die Function $\psi(n)$ sich mittels der Quotienten zweier hypergeometrischer Reihen darstellen lasse, was sich aus seinen „Studien über die Transformation und Integration der Differential- und Differenzengleichungen" (Leipzig 1891, S. 431) ergebe. Dies ist nun allerdings der Fall, und die hypergeometrischen Reihen brechen ab, wenn γ'' der im Text weiterhin folgenden Gl. (73.) für ein ganzes positives λ genügt, aber die Form, unter welcher $\psi(n)$ erscheint, ist eine durchaus andere und weniger übersichtliche als die von mir im genannten Aufsatze gegebene. Und wollte man die *Heymann*sche Methode bei beliebigem λ anwenden, so würde man, soviel ich sehe, auf hypergeometrische Reihen $F(p, q, r, x)$ kommen, bei denen weder p noch q eine negative ganze Zahl, und $x = A' : (A' - A'')$, also grösser als 1 wäre, welche daher nur formales Interesse darböten und für *keinen Werth von r (das von n abhängt) zum Verschwinden gebracht werden könnten.* Wir haben also keine Veranlassung auf diese, an sich gewiss interessante, Darstellungsweise näher einzugehen.

worin λ eine beliebige positive ganze Zahl und die r_h, s_h von A', A'', B', B'' und γ'' rational abhängige Constanten sind. Eine solche Form ist aber nur möglich, wenn γ'' mit A', B', A'', B'' durch die Beziehung

$$(73.) \qquad \gamma'' = (A'B''-A''B'-A'A'')\lambda - A'A''\lambda^2$$

zusammenhängt*), woraus:

$$(73_a.) \qquad \gamma' = (A'B''-A''B'+A'A'')(\lambda+1) - A'A''(\lambda+1)^2$$

folgt. In allen anderen Fällen ist also $\psi(n)$ und ebenso $\varphi(n)$ irrational, womit allerdings nicht *eo ipso* verhindert ist, dass $\varphi(n)$ (wie etwa $\overset{n}{y}_1$ und $\overset{n}{y}_2$) in geschlossene Form gebracht werden könnte; aber nicht diese, sondern die *Rationalität* oder *Irrationalität* von $\varphi(n)$ ist hier das Entscheidende. — Für den Fall $\lambda = 1$ ist

$$\gamma'' = A'B''-A''B'-2A'A''$$

und

$$(74.) \qquad \psi(n) = \frac{c}{cn+(A'+A''+B'-B'')}.$$

Dieser Werth steht in Uebereinstimmung mit dem Näherungswerthe von $\overset{n}{y}_1$:

$$(39.) \qquad \overset{n}{y}_1 = \frac{1}{1+\Theta_1},$$

worin

$$(37_a.) \qquad \Theta_1 = \frac{A''-B''+A'+B'}{c}\cdot\frac{1}{n}+\cdots,$$

welcher zugleich (siehe § 5 Gl. (55.) und weiteren Text) Näherungswerth von $\varphi(n)$ ist. Die Uebereinstimmung erklärt sich dadurch, dass die von γ'' abhängigen Terme erst mit höheren Potenzen von $\frac{1}{n}$ multiplicirt sind.

Ausser der obigen Klasse von $\psi(n)$ giebt es noch eine andere von gleicher Mächtigkeit, welche mit ihr in ähnlichem Zusammenhange wie $F(n)$ mit $\varphi(n)$ steht, aber für uns hier kein Interesse hat.

Dagegen muss noch zweierlei bemerkt werden, erstens, dass im Falle

$$A'(n+\lambda)+B' = 0,$$

*) d. h. wenn das aus (22_a.) folgende γ'' in obige Gleichung eingesetzt, mindestens *ein* positives ganzes λ als Wurzel derselben entstehen lässt. Siehe a. a. O. Gl. (49.).

$\psi(n)$ (was λ auch sein mag) den einfachen Werth

$$\psi(n) = -\frac{c}{A''(n-1)+B''}$$

erhält*); zweitens, dass $A''(n-\lambda)+B''$ ein Factor von $A''n+B''+\frac{\gamma''}{c}\psi(n)$ ist**).

*) a. a. O. Gl. (70.).
**) ib. § 6, II.

(Schluss folgt.)

Anmerkung.

In dem vorangehenden Aufsatze ist öfters eine Function von n als *„in geschlossenem Ausdruck"* oder *„in geschlossener Form darstellbar"* bezeichnet worden. Wir erklären, um Zweifel oder Einwürfe zu vermeiden, eine derartig bezeichnete Function präcise als eine solche, deren Werth für jedes (mindestens für jedes positive ganzzahlige) n sich mit *absoluter* oder *beliebig grosser* Genauigkeit angeben lässt.

Druckfehler.

In der letzten Gleichung auf S. 158 muss es im Zähler am Schlusse heissen $+c$ statt $-c$.

Applications of certain partial differential equations derived from *Codazzis* equations.

(By Mr. *Thomas Craig* at Baltimore.)

I.

Let X, Y, Z denote the direction cosines of the normal to a surface at a point (u, v) then adopting the usual notation we write

$$(1.)\qquad D = \Sigma X \frac{\partial^2 x}{\partial u^2},\quad D' = \Sigma X \frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v},\quad D'' = \Sigma X \frac{\partial^2 x}{\partial v^2}.$$

If further the linear element is given by the relation

$$(2.)\qquad ds^2 = E du^2 + 2F du dv + G dv^2$$

we write in *Christoffels* notation

$$(3.)\quad \begin{cases} \left\{\begin{matrix}11\\1\end{matrix}\right\} = \dfrac{G\dfrac{\partial E}{\partial u} + F\dfrac{\partial E}{\partial v} - 2F\dfrac{\partial F}{\partial u}}{2(EG-F^2)}, & \left\{\begin{matrix}11\\2\end{matrix}\right\} = \dfrac{-F\dfrac{\partial E}{\partial u} + 2E\dfrac{\partial F}{\partial u} - E\dfrac{\partial E}{\partial v}}{2(EG-F^2)}, \\ \left\{\begin{matrix}12\\1\end{matrix}\right\} = \dfrac{G\dfrac{\partial E}{\partial v} - F\dfrac{\partial G}{\partial u}}{2(EG-F^2)}, & \left\{\begin{matrix}12\\2\end{matrix}\right\} = \dfrac{E\dfrac{\partial G}{\partial u} - F\dfrac{\partial E}{\partial v}}{2(EG-F^2)}, \\ \left\{\begin{matrix}22\\1\end{matrix}\right\} = \dfrac{-F\dfrac{\partial G}{\partial v} + 2G\dfrac{\partial F}{\partial v} - G\dfrac{\partial G}{\partial u}}{2(EG-F^2)}, & \left\{\begin{matrix}22\\2\end{matrix}\right\} = \dfrac{E\dfrac{\partial G}{\partial v} + F\dfrac{\partial G}{\partial u} - 2F\dfrac{\partial F}{\partial v}}{2(EG-F^2)}. \end{cases}$$

We have also

$$(4.)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial \log\sqrt{EG-F^2}}{\partial u} = \left\{\begin{matrix}11\\1\end{matrix}\right\} + \left\{\begin{matrix}12\\2\end{matrix}\right\}, \\ \dfrac{\partial \log\sqrt{EG-F^2}}{\partial v} = \left\{\begin{matrix}22\\2\end{matrix}\right\} + \left\{\begin{matrix}12\\1\end{matrix}\right\}. \end{cases}$$

Write now

$$P,\ Q,\ R = \frac{D}{\sqrt{EG-F^2}},\quad \frac{D'}{\sqrt{EG-F^2}},\quad \frac{D''}{\sqrt{EG-F^2}}$$

and *Codazzis* equations take the form*)

$$(5.)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial P}{\partial v}+\left\{{22 \atop 2}\right\}P+\left\{{11 \atop 2}\right\}R = \dfrac{\partial Q}{\partial u}-2\left\{{12 \atop 2}\right\}Q, \\ \dfrac{\partial R}{\partial u}+\left\{{22 \atop 1}\right\}P+\left\{{11 \atop 1}\right\}R = \dfrac{\partial Q}{\partial v}-2\left\{{12 \atop 1}\right\}Q. \end{cases}$$

If (u, v) are conjugate lines we have $Q = 0$; if (u, v) are asymptotic lines $P = R = 0$ and

$$(6.)\quad Q = e^{-2\int\left[\left\{{12 \atop 2}\right\}du+\left\{{12 \atop 1}\right\}dv\right]}$$

with

$$(7.)\quad \frac{\partial}{\partial v}\left\{{12 \atop 2}\right\}-\frac{\partial}{\partial u}\left\{{12 \atop 1}\right\} = 0$$

and also by (4.)

$$(7'.)\quad \frac{\partial\left\{{11 \atop 1}\right\}}{\partial v}-\frac{\partial}{\partial u}\left\{{22 \atop 2}\right\} = 0.$$

Eliminating successively R and P from (5.) we obtain the following equations:

$$(8.)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 P}{\partial u\partial v}+\left\{{22 \atop 2}\right\}\dfrac{\partial P}{\partial u}-\left(\dfrac{\partial}{\partial u}\log\left\{{11 \atop 2}\right\}-\left\{{11 \atop 1}\right\}\right)\dfrac{\partial P}{\partial v} \\ \qquad +\left(\dfrac{\partial}{\partial u}\left\{{22 \atop 2}\right\}-\left\{{22 \atop 2}\right\}\dfrac{\partial}{\partial u}\log\left\{{11 \atop 2}\right\}+\left\{{11 \atop 1}\right\}\left\{{22 \atop 2}\right\}-\left\{{11 \atop 2}\right\}\left\{{22 \atop 1}\right\}\right)P \\ = \dfrac{\partial^2 Q}{\partial u^2}+\left(2\left\{{12 \atop 2}\right\}+\left\{{11 \atop 1}\right\}-\dfrac{\partial}{\partial u}\log\left\{{11 \atop 2}\right\}\right)\dfrac{\partial Q}{\partial u}-\left\{{11 \atop 2}\right\}\dfrac{\partial Q}{\partial v} \\ \qquad +\left(2\dfrac{\partial}{\partial u}\left\{{12 \atop 2}\right\}-2\left\{{12 \atop 2}\right\}\dfrac{\partial}{\partial u}\log\left\{{11 \atop 2}\right\}+2\left\{{11 \atop 1}\right\}\left\{{12 \atop 2}\right\}-2\left\{{11 \atop 2}\right\}\left\{{12 \atop 1}\right\}\right)Q, \end{cases}$$

$$(9.)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 R}{\partial u\partial v}-\left(\dfrac{\partial}{\partial v}\log\left\{{22 \atop 1}\right\}-\left\{{22 \atop 2}\right\}\right)\dfrac{\partial R}{\partial u}+\left\{{11 \atop 1}\right\}\dfrac{\partial R}{\partial v} \\ \qquad +\left(\dfrac{\partial}{\partial v}\left\{{11 \atop 1}\right\}-\left\{{11 \atop 1}\right\}\dfrac{\partial}{\partial v}\log\left\{{22 \atop 1}\right\}+\left\{{11 \atop 1}\right\}\left\{{22 \atop 2}\right\}-\left\{{11 \atop 2}\right\}\left\{{22 \atop 1}\right\}\right)R \\ = \dfrac{\partial^2 Q}{\partial v^2}-\left\{{22 \atop 1}\right\}\dfrac{\partial Q}{\partial v}+\left(2\left\{{12 \atop 1}\right\}+\left\{{22 \atop 2}\right\}-\dfrac{\partial}{\partial v}\log\left\{{22 \atop 1}\right\}\right)\dfrac{\partial Q}{\partial v} \\ \qquad +\left(2\dfrac{\partial}{\partial v}\left\{{12 \atop 1}\right\}-2\left\{{12 \atop 1}\right\}\dfrac{\partial}{\partial v}\log\left\{{22 \atop 1}\right\}+2\left\{{22 \atop 2}\right\}\left\{{12 \atop 1}\right\}-\left\{{22 \atop 1}\right\}\left\{{12 \atop 2}\right\}\right)Q \end{cases}$$

or say for brevity

$$(8'.)\quad [P] = [Q, u]\cdots,$$

$$(9'.)\quad [R] = [Q, v]\cdots.$$

*) *Bianchi:* Vorlesungen über Differentialgeometrie. Erste Lieferung S. 92 (IV*).

Equation (9.) is obtained from (8.) by interchanging u and v, which interchanges 1 and 2 in *Christoffels* symbol remembering that $\left\{ {12 \atop k} \right\} = \left\{ {21 \atop k} \right\}$.

For $Q = 0$ we have

$$(10.)\qquad [P] = 0, \quad [R] = 0.$$

These equations in which the independent variables u and v are the parameters of a system of conjugate lines are of particular interest. Is it possible to obtain equations of the same form satisfied by P and R, when u and v are the parameters of other than conjugate lines? To satisfy this condition Q would have to be a common integral, other than zero, of the two equations

$$(11.)\qquad [Q, u] = 0, \quad [Q, v] = 0.$$

As each of these equations is derived from the other by interchanging u and v it is clear that if $Q_1(u, v)$ is an integral of the first then $Q_1(v, u)$ will be an integral of the second, and if it is to be a common integral we must have

$$Q_1(u, v) = Q_1(v, u).$$

That is the common integral must be a symmetric function of (u, v). The value of Q given by (6.) is at once seen to be a common integral for

$$[Q, u] = 0 \quad \text{and} \quad [Q, v] = 0;$$

but for this case we have $P = R = 0$ since u and v are now the parameters of the asymptotic lines of the surface. Again the value of Q given by

$$(12.)\qquad \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial Q}{\partial u} &= -2 \left\{ {11 \atop 1} \right\} Q, \\ \frac{\partial Q}{\partial v} &= -2 \left\{ {22 \atop 2} \right\} Q \end{aligned} \right.$$

will satisfy both of equations (11.) provided we have

$$(13.)\qquad \left\{ {11 \atop 1} \right\} = \left\{ {12 \atop 2} \right\}, \quad \left\{ {22 \atop 2} \right\} = \left\{ {12 \atop 1} \right\},$$

which obviously conducts again to asymptotic lines. Finally assume

$$(14.)\qquad \frac{\partial Q}{\partial u} = -2 \left\{ {11 \atop 2} \right\} Q, \quad \frac{\partial Q}{\partial v} = -2 \left\{ {22 \atop 1} \right\} Q;$$

and the corresponding value of Q will satisfy both of (11.) provided

$$(15.)\qquad \left\{ {11 \atop 2} \right\} = \left\{ {12 \atop 2} \right\}, \quad \left\{ {22 \atop 1} \right\} = \left\{ {12 \atop 2} \right\}.$$

In this case also the variables u and v are the parameters of asymptotic lines and so again $P = R = 0$.

The three cases just considered do not really give a common integral of equations (11.) viz

$$[Q, u] = 0, \quad [Q, v] = 0.$$

In fact as we have been conducted to asymptotic lines in each case these equations do not exist; for since for these lines we have $P = R = 0$, equations (5.) become

$$\frac{\partial Q_1}{\partial u} - 2\left\{ {12 \atop 2} \right\} Q = 0,$$
$$\frac{\partial Q_1}{\partial v} - 2\left\{ {12 \atop 1} \right\} Q = 0,$$

and so (11.) are merely

$$\frac{\partial}{\partial u}\left[\frac{\partial Q_1}{\partial u} - 2\left\{ {12 \atop 2} \right\} Q_1\right] = 0,$$
$$\frac{\partial}{\partial v}\left[\frac{\partial Q_1}{\partial v} - 2\left\{ {12 \atop 1} \right\} Q_1\right] = 0,$$

which are identities. It is easy to see that aside from $Q = 0$, equations (11.) have no common integral; from the equations

$$(16.) \qquad \frac{\partial^2}{\partial v^2}[Q_1, u] = 0, \quad \frac{\partial^2}{\partial u^2}[Q_1, v] = 0.$$

Reduce these by aid of (11.), subtract and divide out by the coefficient of $\frac{\partial^2 Q_1}{\partial u \partial v}$; the result is of the form

$$(17.) \qquad \frac{\partial^2 Q_1}{\partial u \partial v} + A\frac{\partial Q_1}{\partial u} + B\frac{\partial Q_1}{\partial v} + CQ_1 = 0$$

which is of course satisfied by the same value of Q; differentiate this for u and subtract $\frac{\partial}{\partial v}[Q_1, u]$; then differentiate for v and subtract $\frac{\partial}{\partial u}[Q_1, v]$; again differentiate for both u and v and in all cases reduce to the form (17.). We shall then have four equations of the form (17.) all satisfied by Q_1; we can proceed in this way and form an indefinite number of equations all of the same form and all satisfied by the same function Q_1; this is clearly impossible unless $Q_1 = 0$. Equations (11.) therefore have no common integral and therefore the equations (10.)

$$(10.) \qquad [P] = 0, \quad [R] = 0$$

can only hold when u and v are the parameters of conjugate lines.

We shall now asusme $Q = 0$ and consider equations (10.). Instead however of using the present values of P and R viz.

$$P = \frac{D}{\sqrt{EG-F^2}}, \quad R = \frac{D''}{\sqrt{EG-F^2}}$$

we shall use

$$(18.) \qquad P = \frac{\sqrt{EG}}{\sqrt{EG-F^2}} \cdot \frac{D}{E}, \quad R = \frac{\sqrt{EG}}{\sqrt{EG-F^2}} \cdot \frac{D''}{G};$$

these for $F = 0$ become

$$P = \frac{D}{E} = \frac{1}{\varrho_1}, \quad R = \frac{D''}{G} = \frac{1}{\varrho_2}$$

ϱ_1 and ϱ_2 denoting the principal radii of curvature of the surface at the point (u, v).

If ϑ denote the angle between the coordinate lines u and v we have

$$\sin\vartheta = \frac{\sqrt{EG-F^2}}{\sqrt{EG}}$$

so that (18.) give

$$(18'.) \qquad P = \frac{1}{\varrho_1 \sin\vartheta}, \quad R = \frac{1}{\varrho_2 \sin\vartheta}$$

which give a geometrical meaning to the quantities P und R.

We have now for the differential equations satisfied by P and R,

$$(19.) \quad \begin{cases} [P] = \dfrac{\partial^2 P}{\partial u \partial v} + \Big[\dfrac{\partial}{\partial v}\log\sqrt{\dfrac{E}{G}} + \begin{Bmatrix}22\\2\end{Bmatrix}\Big]\dfrac{\partial P}{\partial u} \\ \qquad\qquad + \Big[\dfrac{\partial}{\partial u}\log\sqrt{\dfrac{E}{G}} - \dfrac{\partial}{\partial u}\log\begin{Bmatrix}11\\2\end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix}11\\1\end{Bmatrix}\Big]\dfrac{\partial P}{\partial v} \\ + \Big[\dfrac{\partial}{\partial u}\begin{Bmatrix}22\\2\end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix}22\\2\end{Bmatrix}\dfrac{\partial}{\partial u}\log\begin{Bmatrix}11\\2\end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix}11\\1\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}22\\2\end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix}11\\2\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}22\\1\end{Bmatrix} + \sqrt{\dfrac{G}{E}}\dfrac{\partial^2}{\partial u \partial v}\sqrt{\dfrac{E}{G}} \\ \qquad + \begin{Bmatrix}22\\2\end{Bmatrix}\dfrac{\partial}{\partial u}\log\sqrt{\dfrac{E}{G}} - \Big(\dfrac{\partial}{\partial u}\log\begin{Bmatrix}11\\2\end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix}11\\1\end{Bmatrix}\Big)\dfrac{\partial \log}{\partial v}\sqrt{\dfrac{E}{G}}\Big]P = 0, \end{cases}$$

$$(20.) \quad \begin{cases} [R] = \dfrac{\partial^2 R}{\partial u \partial v} + \Big[\dfrac{\partial}{\partial v}\log\sqrt{\dfrac{G}{E}} - \dfrac{\partial}{\partial v}\log\begin{Bmatrix}22\\1\end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix}22\\2\end{Bmatrix}\Big]\dfrac{\partial R}{\partial u} \\ + \Big[\dfrac{\partial}{\partial u}\log\sqrt{\dfrac{G}{E}} + \begin{Bmatrix}11\\1\end{Bmatrix}\Big]\dfrac{\partial R}{\partial v} + \Big[\dfrac{\partial}{\partial v}\begin{Bmatrix}11\\1\end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix}11\\1\end{Bmatrix}\dfrac{\partial}{\partial v}\log\begin{Bmatrix}22\\1\end{Bmatrix} \\ \qquad + \begin{Bmatrix}11\\1\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}22\\2\end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix}11\\2\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}22\\1\end{Bmatrix} + \sqrt{\dfrac{E}{G}}\dfrac{\partial^2}{\partial u \partial v}\sqrt{\dfrac{G}{E}} + \begin{Bmatrix}11\\1\end{Bmatrix}\dfrac{\partial}{\partial v}\log\sqrt{\dfrac{G}{E}} \\ \qquad\qquad - \Big(\dfrac{\partial}{\partial v}\log\begin{Bmatrix}22\\1\end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix}22\\2\end{Bmatrix}\Big)\dfrac{\partial \log}{\partial u}\sqrt{\dfrac{G}{E}}\Big]R = 0. \end{cases}$$

Using the relations

$$(21.)\qquad \frac{\partial}{\partial v}\log\sqrt{\frac{E}{G}} = \left\{\begin{matrix}12\\1\end{matrix}\right\}-\left\{\begin{matrix}22\\2\end{matrix}\right\}+\frac{F}{EG}\left[G\left\{\begin{matrix}12\\2\end{matrix}\right\}-E\left\{\begin{matrix}22\\1\end{matrix}\right\}\right],$$

$$(22.)\qquad \frac{\partial}{\partial u}\log\sqrt{\frac{E}{G}} = \left\{\begin{matrix}11\\1\end{matrix}\right\}-\left\{\begin{matrix}12\\2\end{matrix}\right\}+\frac{F}{EG}\left[G\left\{\begin{matrix}11\\2\end{matrix}\right\}-E\left\{\begin{matrix}12\\1\end{matrix}\right\}\right],$$

the coefficient of $\frac{\partial P}{\partial u}$ takes the form

$$(23.)\qquad \frac{\partial}{\partial v}\log\sqrt{\frac{E}{G}}+\left\{\begin{matrix}22\\2\end{matrix}\right\}=\left\{\begin{matrix}12\\1\end{matrix}\right\}+\frac{F}{EG}\left[G\left\{\begin{matrix}12\\2\end{matrix}\right\}-E\left\{\begin{matrix}22\\1\end{matrix}\right\}\right]$$

and the coefficient of $\frac{\partial P}{\partial v}$ becomes

$$(24.)\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial u}\log\sqrt{\frac{E}{G}}-\frac{\partial}{\partial u}\log\left\{\begin{matrix}11\\2\end{matrix}\right\}+\left\{\begin{matrix}11\\1\end{matrix}\right\} &= 2\left\{\begin{matrix}11\\1\end{matrix}\right\}-\frac{\partial}{\partial u}\log\left\{\begin{matrix}11\\2\end{matrix}\right\}-\left\{\begin{matrix}12\\2\end{matrix}\right\}\\ &\quad+\frac{F}{EG}\left[G\left\{\begin{matrix}11\\2\end{matrix}\right\}-E\left\{\begin{matrix}12\\1\end{matrix}\right\}\right].\end{aligned}\right.$$

These forms will be convenient to use in some cases. Equation (20.) is derived from (19.) by interchanging u and v which, in *Christoffels* symbols, is equivalent to interchanging 1 and 2, remembering that

$$\left\{\begin{matrix}12\\k\end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix}21\\k\end{matrix}\right\}.$$

Following *Darbouxs* notation we shall denote the invariants of (19.) by h_{01} and k_{01} and those of (20.) by h_{02} and k_{02}. We readily find for these invariants the values

$$(25.)\qquad \left\{\begin{aligned} h_{01} &= \left\{\begin{matrix}11\\2\end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}22\\1\end{matrix}\right\},\\ k_{01} &= \left\{\begin{matrix}22\\1\end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}11\\2\end{matrix}\right\}-\frac{\partial^2}{\partial u\partial v}\log\left\{\begin{matrix}11\\2\end{matrix}\right\}+\frac{\partial}{\partial v}\left\{\begin{matrix}11\\1\end{matrix}\right\}-\frac{\partial}{\partial u}\left\{\begin{matrix}22\\2\end{matrix}\right\},\end{aligned}\right.$$

$$(26.)\qquad \left\{\begin{aligned} h_{02} &= \left\{\begin{matrix}11\\2\end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}22\\1\end{matrix}\right\}-\frac{\partial^2}{\partial u\partial v}\log\left\{\begin{matrix}22\\1\end{matrix}\right\}+\frac{\partial}{\partial u}\left\{\begin{matrix}22\\2\end{matrix}\right\}-\frac{\partial}{\partial v}\left\{\begin{matrix}11\\1\end{matrix}\right\},\\ k_{02} &= \left\{\begin{matrix}11\\2\end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}22\\1\end{matrix}\right\}.\end{aligned}\right.$$

The invariants h_{02} and k_{02} are of course found from h_{01} and k_{01} by interchanging the letters u and v. If we denote the *Laplaces* series derived from $[P]=0$ and $[R]=0$ by

$$(27.)\qquad \begin{matrix}[P_{-i}], & \ldots, & [P_{-2}], & [P_{-1}], & [P], & [P_1], & [P_2], & \ldots, & [P_i], & \ldots,\\ [R_{-i}], & \ldots, & [R_{-2}], & [R_{-1}], & [R], & [R_1], & [R_2], & \ldots, & [R_i], & \ldots,\end{matrix}$$

we find readily, as I have shown elsewhere*) for the case of lines of curvature that these two series are *equivalent*, the equations $[P_i]$ and $[R_{i-1}]$ having the same invariants.

Denoting the unknown functions of the P-series by

$$\ldots P_{-i1}, \ \ldots, \ P_{11}, P_{01}, P_{11}, \ \ldots, \ P_{i1}, \ \ldots,$$

and those of the R-series by

$$\ldots R_{-i2}, \ \ldots, \ R_{-12}, R_{02}, R_{12}, \ \ldots, \ R_{i2}, \ \ldots,$$

it is easy to see that the transformations connecting the two series are given by the relations

$$(28.) \quad \begin{cases} P_{11} = \dfrac{G}{E}\begin{Bmatrix}11\\2\end{Bmatrix} R_{02}, \\ R_{-12} = \dfrac{E}{G}\begin{Bmatrix}22\\1\end{Bmatrix} P_{01} \end{cases}$$

or more generally

$$(29.) \quad \begin{cases} P_{i+1,1} = \dfrac{G}{E}\begin{Bmatrix}11\\2\end{Bmatrix} R_{i2}, \\ R_{-i-1,2} = \dfrac{E}{G}\begin{Bmatrix}22\\1\end{Bmatrix} P_{-i1}. \end{cases}$$

Denote by $\dfrac{1}{R_u}$ and $\dfrac{1}{R_v}$ the geodesic curvatures of the lines u and v; we have

$$(30.) \quad \begin{cases} \dfrac{1}{R_u} = \dfrac{1}{\sqrt{EG-F^2}}\left[\dfrac{\partial}{\partial v}\dfrac{F}{\sqrt{G}} - \dfrac{\partial \sqrt{G}}{\partial u}\right] = \dfrac{\sqrt{EG-F^2}}{G\sqrt{G}}\begin{Bmatrix}22\\1\end{Bmatrix}, \\ \dfrac{1}{R_v} = \dfrac{1}{\sqrt{EG-F^2}}\left[\dfrac{\partial}{\partial u}\dfrac{F}{\sqrt{E}} - \dfrac{\partial \sqrt{E}}{\partial v}\right] = \dfrac{\sqrt{EG-F^2}}{E\sqrt{E}}\begin{Bmatrix}11\\2\end{Bmatrix}; \end{cases}$$

using these and (4.) we find for the invariants the expressions

$$(31.) \quad \begin{cases} h_{01} = \dfrac{EG\sqrt{EG}}{EG-F^2}\,\dfrac{1}{R_u R_v}, \\ k_{01} = \dfrac{EG\sqrt{EG}}{EG-F^2}\,\dfrac{1}{R_u R_v} - \dfrac{\partial^2}{\partial u \partial v}\log\dfrac{E\sqrt{E}}{R_v} + \dfrac{\partial}{\partial u}\begin{Bmatrix}12\\1\end{Bmatrix} + \dfrac{\partial}{\partial v}\begin{Bmatrix}11\\1\end{Bmatrix}, \end{cases}$$

$$(32.) \quad \begin{cases} h_{02} = \dfrac{EG\sqrt{EG}}{EG-F^2}\,\dfrac{1}{R_u R_v} - \dfrac{\partial^2}{\partial u \partial v}\log\dfrac{G\sqrt{G}}{R_u} + \dfrac{\partial}{\partial u}\begin{Bmatrix}22\\2\end{Bmatrix} + \dfrac{\partial}{\partial v}\begin{Bmatrix}12\\2\end{Bmatrix}, \\ k_{02} = \dfrac{EG\sqrt{EG}}{EG-F^2}\,\dfrac{1}{R_u R_v}. \end{cases}$$

---

*) Comptes Rendus, Oct. 26. 1896. p. 634.

If either of the lines u or v is a geodesic on the surface for example if $\frac{1}{R_u} = 0$, that is $u = \text{const.}$ is a geodesic, we shall have $h_{01} = k_{02} = 0$; the positive part of the P-series will end with the first equation $[P] = 0$. Since in general $k_i = h_{i-1}$ for i positive, negative, or zero we have $k_{0,2} = h_{-1,2} = 0$; h_{-12} is the h- invariant of $[R_{-1}] = 0$ which is, as already remarked, equivalent to $[P] = 0$. The invariant h_{02} is indeterminate; so in fact is the equation $[R] = 0$ since now $\begin{bmatrix}22\\1\end{bmatrix} = 0$. With the present values of P and R equations (5.) must be replaced by

$$\frac{\partial P}{\partial v}+\left[\begin{Bmatrix}22\\2\end{Bmatrix}+\frac{\partial}{\partial v}\log\sqrt{\frac{E}{G}}\right]P+\frac{G}{E}\begin{Bmatrix}11\\2\end{Bmatrix}R = \sqrt{\frac{G}{E}}\left[\frac{\partial\varphi}{\partial u}-2\begin{Bmatrix}12\\2\end{Bmatrix}Q\right],$$

$$(33.)\quad \frac{\partial R}{\partial u}+\frac{E}{G}\begin{Bmatrix}22\\1\end{Bmatrix}P+\left[\begin{Bmatrix}11\\1\end{Bmatrix}+\frac{\partial}{\partial v}\log\sqrt{\frac{G}{E}}\right]R = \sqrt{\frac{E}{G}}\left[\frac{\partial\varphi}{\partial v}-2\begin{Bmatrix}12\\1\end{Bmatrix}Q\right],$$

and since we have assumed $Q = 0$ we have now from the second of these

$$(34.)\qquad \frac{\partial R}{\partial u}+\left[\begin{Bmatrix}11\\1\end{Bmatrix}+\frac{\partial}{\partial v}\log\sqrt{\frac{G}{E}}\right]R = 0,$$

a partial differential equation of the first order to be satisfied by R.

There is of course for this case no positive part of the *Laplaces* series in R. The negative part of both series will be obtained by using the second of equations (29.).

If u and v are the parameters of the lines of curvature on the given surface the preceding remarks apply at once to its surface of centers, since each of the lines of curvature becomes a geodesic on one of the sheets of the latter surface.

II.

We shall now make some special hypotheses concerning the series (27.) of *Laplaces* equations. First assume that (19.) and (20.) are identical. This gives the following equations of condition:

$$(\alpha)\qquad \frac{\partial}{\partial v}\log\sqrt{\frac{E}{G}} = \frac{\partial}{\partial v}\log\sqrt{\frac{G}{E}}-\frac{\partial}{\partial v}\log\begin{Bmatrix}22\\1\end{Bmatrix},$$

$$(\beta)\qquad \frac{\partial}{\partial u}\log\sqrt{\frac{G}{E}} = \frac{\partial}{\partial u}\log\sqrt{\frac{E}{G}}-\frac{\partial}{\partial u}\log\begin{Bmatrix}11\\2\end{Bmatrix},$$

$$(\gamma)\quad\begin{cases}\dfrac{\partial}{\partial u}\begin{Bmatrix}22\\2\end{Bmatrix}-\begin{Bmatrix}22\\2\end{Bmatrix}\dfrac{\partial}{\partial u}\log\begin{Bmatrix}11\\2\end{Bmatrix}+\sqrt{\dfrac{G}{E}}\dfrac{\partial^2}{\partial u\partial v}\sqrt{\dfrac{E}{G}}+\begin{Bmatrix}22\\2\end{Bmatrix}\dfrac{\partial}{\partial u}\log\sqrt{\dfrac{E}{G}}\\ \qquad -\left(\dfrac{\partial}{\partial u}\log\begin{Bmatrix}11\\2\end{Bmatrix}-\begin{Bmatrix}11\\1\end{Bmatrix}\right)\dfrac{\partial}{\partial v}\log\sqrt{\dfrac{E}{G}}\\ =\dfrac{\partial}{\partial v}\begin{Bmatrix}11\\1\end{Bmatrix}-\begin{Bmatrix}11\\1\end{Bmatrix}\dfrac{\partial}{\partial v}\log\begin{Bmatrix}22\\1\end{Bmatrix}+\sqrt{\dfrac{E}{G}}\dfrac{\partial^2}{\partial u\partial v}\sqrt{\dfrac{G}{E}}+\begin{Bmatrix}11\\1\end{Bmatrix}\dfrac{\partial}{\partial v}\log\sqrt{\dfrac{G}{E}}\\ \qquad -\left(\dfrac{\partial}{\partial v}\log\begin{Bmatrix}22\\1\end{Bmatrix}-\begin{Bmatrix}22\\2\end{Bmatrix}\right)\dfrac{\partial}{\partial u}\log\sqrt{\dfrac{G}{E}}.\end{cases}$$

The first two of these can be written

$$(\alpha')\qquad \frac{\partial}{\partial v}\log\frac{E}{G} = -\frac{\partial}{\partial v}\log\begin{Bmatrix}22\\1\end{Bmatrix},$$

$$(\beta')\qquad \frac{\partial}{\partial u}\log\frac{E}{G} = \frac{\partial}{\partial u}\log\begin{Bmatrix}11\\2\end{Bmatrix}.$$

Differentiating (α') for u and (β') for v subtracting and integrating we find

$$h_{01} = k_{02} = \begin{Bmatrix}22\\1\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}11\\2\end{Bmatrix} = UV$$

U being a function of u alone and V a function of v alone.

Using (α') and (β') to reduce (γ) we get

$$(\gamma')\qquad \frac{\partial^2\log\dfrac{E}{G}}{\partial u\partial v}+\frac{\partial}{\partial u}\begin{Bmatrix}22\\2\end{Bmatrix}-\frac{\partial}{\partial v}\begin{Bmatrix}11\\1\end{Bmatrix} = 0$$

or by (4.)

$$(\gamma'')\qquad \frac{\partial^2\log\dfrac{E}{G}}{\partial u\partial v} = \frac{\partial}{\partial u}\begin{Bmatrix}12\\1\end{Bmatrix}-\frac{\partial}{\partial v}\begin{Bmatrix}12\\2\end{Bmatrix}.$$

From (25.) and (26.) we find now

$$h_{02} = k_{01} = UV,$$

that is the invariants of the new equation say h and k, are equal and have UV for their common value.

The differential equation satisfied by P and R is now

$$(35.)\quad\begin{cases}\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial u\partial v}+\left[\dfrac{\partial}{\partial v}\log\sqrt{\dfrac{E}{G}}+\begin{Bmatrix}22\\2\end{Bmatrix}\right]\dfrac{\partial\varphi}{\partial u}-\left[\dfrac{\partial}{\partial u}\log\sqrt{\dfrac{E}{G}}-\begin{Bmatrix}11\\1\end{Bmatrix}\dfrac{\partial\varphi}{\partial v}\right.\\ \qquad -\left[UV-\dfrac{\partial}{\partial v}\begin{Bmatrix}11\\1\end{Bmatrix}+\dfrac{\partial^2}{\partial u\partial v}\log\sqrt{\dfrac{E}{G}}+\left(\dfrac{\partial}{\partial u}\log\sqrt{\dfrac{E}{G}}-\begin{Bmatrix}11\\1\end{Bmatrix}\right)\right.\\ \qquad\qquad \left.\left(\dfrac{\partial}{\partial v}\log\sqrt{\dfrac{E}{G}}+\begin{Bmatrix}22\\2\end{Bmatrix}\right]\varphi = 0\end{cases}$$

or by (21.), (22.) and (γ')

$$(35'.)\left\{\begin{aligned}&\frac{\partial^2\varphi}{\partial u\partial v}+\left[\begin{Bmatrix}12\\1\end{Bmatrix}+\frac{F}{EG}\left[G\begin{Bmatrix}12\\2\end{Bmatrix}-E\begin{Bmatrix}22\\1\end{Bmatrix}\right]\right]\frac{\partial\varphi}{\partial u}\\&\qquad\qquad+\left[\begin{Bmatrix}12\\2\end{Bmatrix}-\frac{F}{EG}\left[G\begin{Bmatrix}11\\2\end{Bmatrix}-E\begin{Bmatrix}12\\1\end{Bmatrix}\right]\right]\frac{\partial\varphi}{\partial v}\\&-\left[UV-\frac{\partial}{\partial v}\begin{Bmatrix}11\\1\end{Bmatrix}+\frac{\partial^2}{\partial u\partial v}\log\sqrt{\frac{E}{G}}\right.\\&\qquad\left.+\left(\frac{\partial}{\partial u}\log\sqrt{\frac{E}{G}}-\begin{Bmatrix}11\\1\end{Bmatrix}\right)\left(\frac{\partial}{\partial v}\log\sqrt{\frac{E}{G}}+\begin{Bmatrix}22\\2\end{Bmatrix}\right)\right]\varphi = 0.\end{aligned}\right.$$

Suppose now $F=0$, that is u and v are the parameters of the lines of curvature; then from (3.) we have

$$(36.)\left\{\begin{aligned}&\begin{Bmatrix}11\\1\end{Bmatrix}=\frac{\partial\log\sqrt{E}}{\partial u},\quad \begin{Bmatrix}12\\1\end{Bmatrix}=\frac{\partial\log\sqrt{E}}{\partial v},\quad \begin{Bmatrix}22\\1\end{Bmatrix}=\frac{-1}{2E}\frac{\partial G}{\partial u},\\&\begin{Bmatrix}11\\2\end{Bmatrix}=\frac{-1}{2G}\frac{\partial E}{\partial v},\quad \begin{Bmatrix}12\\2\end{Bmatrix}=\frac{\partial\log\sqrt{G}}{\partial u},\quad \begin{Bmatrix}22\\2\end{Bmatrix}=\frac{\partial\log\sqrt{G}}{\partial v};\end{aligned}\right.$$

(γ'') gives now

$$\frac{E}{G} = \frac{U_3}{V_3}$$

or say

$$(37.)\qquad E = \lambda U_3,\quad G = \lambda V_3.$$

The lines of curvature are isometric. Substituting these values of E and G in (α') or (β') we find for λ the relation

$$\frac{1}{\lambda}\frac{\partial\lambda}{\partial u}\frac{\partial\lambda}{\partial v} = \frac{\partial^2\lambda}{\partial u\partial v}$$

or

$$\frac{1}{\lambda^2}\frac{\partial\lambda}{\partial v}\frac{\partial\lambda}{\partial v} = \frac{1}{\lambda}\frac{\partial^2\lambda}{\partial u\partial v} = \frac{\partial^2\log\lambda}{\partial u\partial v}+\frac{1}{\lambda^2}\frac{\partial\lambda}{\partial v}\frac{\partial\lambda}{\partial v},$$

or

$$\frac{\partial^2\log\lambda}{\partial u\partial v} = 0,$$

giving finally

$$\lambda = U_2V_2,$$

and so $E = U_3U_2V_2$, $G = U_2V_2V_3$ or say

$$(38.)\qquad E = U_1V_2,\quad G = U_2V_1.$$

The linear element is then of the form

$$ds^2 = U_2 V_2 \left[\frac{U_1}{U_2} du^2 + \frac{V_1}{V_2} dv^2\right]$$

or simply

(39.) $$ds^2 = U_2 V_2 [U_1^2 du^2 + V_1^2 dv^2] = \lambda [U_1^2 du^2 + V_1^2 dv^2].$$

Now by (30.) and (31.) we have

$$h_{01} = \frac{\sqrt{EG}}{R_u R_v} = \frac{\partial \log \sqrt{2}}{\partial v} \frac{\partial \log \sqrt{G}}{\partial u} = \frac{1}{4} \frac{V_2'}{V_2} \frac{U_2'}{U_2} = UV.$$

In this case equation (35.) becomes simply

(40.) $$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial u \partial v} + \frac{1}{2} \frac{V_2'}{V_2} \frac{\partial \varphi}{\partial u} + \frac{1}{2} \frac{U_2'}{U_2} \frac{\partial \varphi}{\partial v} = 0,$$

or

(41.) $$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial u \partial v} + \frac{\partial \log \sqrt{\lambda}}{\partial v} \frac{\partial \varphi}{\partial u} + \frac{\partial \log \sqrt{\lambda}}{\partial u} \frac{\partial \varphi}{\partial u} = 0.$$

The equation satisfied by the coordinates x, y, z of a point on the surface is now

(42.) $$\frac{\partial^2 \Theta}{\partial u \partial v} - \frac{\partial \log \sqrt{\lambda}}{\partial v} \frac{\partial \Theta}{\partial u} - \frac{\partial \log \sqrt{\lambda}}{\partial u} \frac{\partial \Theta}{\partial v} = 0$$

which, since $\frac{\partial^2 \log \lambda}{\partial u \partial v} = 0$, is the adjoint equation to (41.). We have therefore the theorem*):

When the reciprocals of the principal radii of curvature at a point on a surface satisfy the same linear partial differential equation of the second order $(E) = 0$ the equation satisfied by the Cartesian coordinates of the same point is the adjoint to $(E) = 0$; in this case the lines of curvature form an isometric system and the linear element is given by

$$ds^2 = U_2 V_2 [U_1^2 du^2 + V_1^2 dv^2].$$

The differential equations have equal invariants, the common value being

$$h = k = \frac{1}{4} \frac{U_2' V_2'}{U_2 V_2}.$$

Writing $\varphi = \frac{\psi}{\sqrt{U_2 V_2}}$ (40.) goes into its *reduced form***) viz.

(43.) $$\frac{\partial^2 \psi}{\partial u \partial v} - \frac{1}{4} \frac{U_2' V_2'}{U_2 V_2} \psi = 0$$

---

*) Comptes Rendus, Nov. 16., 1896.

**) *Darboux, Théorie générale des surfaces.* Tom. II. p. 26 et seq.

or

$$(43'.)\qquad \frac{\partial^2\psi}{\partial u\partial v}-h\psi = 0,$$

which is identical with its adjoint.

Particular solutions of (43.) are $\psi=\sqrt{U_2V_2}$, and $\psi=\sqrt{U_2V_2}\log\frac{U_2}{V_2}$. Other particular solutions may be found by the method given by ***Darboux*** (l. c. p. 147).

Let us suppose for the present $F=0$ that is the coordinate lines are the lines of curvature. For P and R in equations (19.) and (20.) write φ_{01} and φ_{02} respectively; these equations become now

$$(44.)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial^2\varphi_{01}}{\partial u\partial v}-\dfrac{\sqrt{G}}{R_v}\dfrac{\partial\varphi_{01}}{\partial u}-\Big(\dfrac{\partial}{\partial u}\log\dfrac{\sqrt{G}}{R_v}+\dfrac{\sqrt{E}}{R_u}\Big)\dfrac{\partial\varphi_{01}}{\partial v} = 0,\\[2ex] \dfrac{\partial^2\varphi_{02}}{\partial u\partial v}-\Big(\dfrac{\partial}{\partial v}\log\dfrac{\sqrt{E}}{R_u}+\dfrac{\sqrt{G}}{R_v}\Big)\dfrac{\partial\varphi_{02}}{\partial u}-\dfrac{\sqrt{E}}{R_v}\dfrac{\partial\varphi_{02}}{\partial u} = 0; \end{cases}$$

also

$$(45.)\qquad \begin{cases} h_{01}=\dfrac{\sqrt{EG}}{R_uR_v},\quad k_{01}=\dfrac{\sqrt{EG}}{R_uR_v}-\dfrac{\partial^2}{\partial u\partial v}\log\dfrac{\sqrt{E}}{R_v},\\[2ex] h_{02}=\dfrac{\sqrt{EG}}{R_uR_v}-\dfrac{\partial}{\partial u\partial v}\log\dfrac{\sqrt{G}}{R_u},\quad k_{02}=\dfrac{\sqrt{EG}}{R_uR_v}; \end{cases}$$

$$(46.)\qquad \frac{\sqrt{G}}{R_v}=-\frac{\partial\log\sqrt{E}}{\partial v},\quad \frac{\sqrt{E}}{R_u}=-\frac{\partial\log\sqrt{G}}{\partial u}.$$

The invariants of the other equations of the ***Laplace***s series are given in the note referred to already in the Comptes Rendus for Oct. 26, 1896. The formulae for the coefficients of the different equations will be taken from the second chapter of the second volume of ***Darboux***.

Consider now the two equations (E_{i1}) and (E_{i2}) of the ***Laplace***s series (27.) (in which we write E_{i1} for P_i and E_{i2} for R_i) and let us assume that these are identical that is that

$$(47.)\qquad a_{i1}=a_{i2},\quad b_{i1}=b_{i2},\quad c_{i1}=c_{i2}$$

a, b, c denoting the coefficients in any equation; from the first of (44.) we have

$$(48.)\qquad \begin{cases} a_{01}=-\dfrac{\sqrt{G}}{R_v},\quad b_{01}=-\Big(\dfrac{\partial}{\partial u}\log\dfrac{\sqrt{G}}{R_v}+\dfrac{\sqrt{E}}{R_u}\Big),\ c_{01}=0,\\[2ex] a_{02}=-\Big(\dfrac{\partial}{\partial v}\log\dfrac{\sqrt{E}}{R_u}+\dfrac{\sqrt{G}}{R_u}\Big),\quad b_{02}=-\dfrac{\sqrt{E}}{R_u},\ c_{02}=0. \end{cases}$$

but we have

$$h_{i1} = h_{i-1,1} - \frac{\partial^2}{\partial u \partial v} \log \frac{\sqrt{G}}{R_u} - \frac{\partial^2}{\partial u \partial v} \log h_{11} h_{21} \cdots h_{i-1,1};$$

(B.) gives therefore

$$(C.) \qquad h_{i1} = h_{i-1,1} = U' V'.$$

From this we have

$$\frac{\partial^2 \log h_{i-1,1}}{\partial u \partial v} = 0$$

and so (B.) becomes

$$(D.) \qquad \frac{\partial^2}{\partial u \partial v} \log \frac{\sqrt{G}}{R_u} + \frac{\partial^2}{\partial u \partial v} \log h_{11} h_{21} \cdots h_{i-2,1} = 0.$$

Again

$$h_{i-1,1} = h_{i-2,1} - \frac{\partial^2}{\partial u \partial v} \log \frac{\sqrt{G}}{R_u} - \frac{\partial^2}{\partial u \partial v} \log h_{11} h_{21} \cdots h_{i-2,1}$$

which by (D.) gives

$$h_{i-1,1} = h_{i-2,1} = U' V'.$$

Continuing this process we get finally

$$h_{01} = h_{11} = \cdots = h_{i1} = U' V'$$

and, since $k_{\alpha,\beta} = h_{\alpha-1,\beta}$, and $h_{i1} = h_{i-1,2}$:

$$k_{01} = k_{12} = \quad \cdots \quad = k_{i1} = U' V',$$

$$h_{01} = h_{02} = k_{01} = k_{02} = U' V'.$$

We are thus conducted back to the case already studied w (E_{01}) and (E_{02}) were identical.

Let us suppose now that the equations (E_{01}) and (E_{11}) are equiva that is have the same invariants; on account of the equivalence of and (E_{02}) the equations of condition

$$(54.) \qquad h_{01} = h_{11}, \quad k_{01} = k_{11}$$

become

$$(55.) \qquad h_{01} = h_{02}, \quad k_{01} = k_{02},$$

which give

$$(56.) \qquad \frac{\partial^2}{\partial u \partial v} \log \frac{\sqrt{E}}{R_v} = 0, \qquad \frac{\partial^2}{\partial u \partial v} \log \frac{\sqrt{G}}{R_u} = 0$$

a particular integral of which is

(65.) $$\Theta_1 = e^{U_2+V_2}.$$

For this case we find

(66.) $$\begin{cases} E = \dfrac{1}{U}\dfrac{\partial \Theta_1}{\partial u} = \dfrac{U_1^2}{2} e^{\int \frac{UU_1^2}{2} du + \int \frac{VV_1^2}{2} dv}, \\ G = \dfrac{1}{V}\dfrac{\partial \Theta_1}{\partial v} = \dfrac{V_1^2}{2} e^{\int \frac{UU_1^2}{2} du + \int \frac{VV_1^2}{2} dv}, \end{cases}$$

giving for the linear element

$$ds^2 = e^{\int \frac{UU_1^2}{2} du + \int \frac{VV_1^2}{2} dv} \left(\frac{U_1^2}{2} du^2 + \frac{V_1^2}{2} dv^2\right)$$

or

$$ds^2 = f(u) g(v) \left(\varphi(u) du^2 + \psi(v) dv^2\right)$$

the form already studied.

In general suppose the equations (E_{i1}) and $(E_{i+1,1})$ to be equivalent; then

(67.) $$h_{i1} = h_{i+1,1}, \quad k_{i1} = k_{i+1,1},$$

and therefore

(68.) $$h_{i1} = h_{i2}, \quad k_{i1} = k_{i2};$$

remembering again that the k of any equation of the series is equal to the h of the preceding equation we shall now find that all of the invariants are equal and have for common value

$$\frac{\sqrt{EG}}{R_u R_v} = UU_1^2 VV_1^2.$$

The coefficients E and G will always be given G by

(69.) $$\begin{cases} E = \dfrac{1}{U}\dfrac{\partial \Theta}{\partial u}, \quad G = \dfrac{1}{V}\dfrac{\partial \Theta}{\partial v}, \\ \left(\dfrac{\partial^2 \Theta}{\partial u \partial v}\right)^2 = 4 \dfrac{\partial \Theta}{\partial u}\dfrac{\partial \Theta}{\partial v} UU_1^2 VV_1^2 \end{cases}$$

or, using the original notation of (57.)

(70.) $$\left(\frac{\partial^2 \Theta}{\partial u \partial v}\right)^2 = 4 \frac{\partial \Theta}{\partial u}\frac{\partial \Theta}{\partial v} U_1 U_2 V_1 V_2.$$

If we write

$$\int U_1 U_2 du = u', \quad \int V_1 V_2 dv = v'$$

The equations (E_{01}), (E_{02}) and the equation satisfied by the ***Cartesian*** coordinates are now

$$(78.)\qquad (E_{01}) = \frac{\partial^2\varphi_{01}}{\partial u\partial v} + \frac{\partial\log\sigma}{\partial v}\frac{\partial\varphi_{01}}{\partial u} + \frac{\partial\log\sigma}{\partial u}\frac{\partial\varphi_{01}}{\partial v} = 0,$$

$$(79.)\qquad (E_{02}) = \frac{\partial^2\varphi_{01}}{\partial u\partial v} + \frac{\partial}{\partial v}\log\frac{1}{\lambda}\frac{\partial\sigma}{\partial v}\frac{\partial\varphi_{02}}{\partial u} + \frac{\partial}{\partial u}\log\frac{\partial\sigma}{\partial v}\frac{\partial\varphi_{02}}{\partial v} = 0,$$

$$(80.)\qquad \frac{\partial^2\varphi_0}{\partial u\partial v} - \frac{\partial\log\sigma}{\partial v}\frac{\partial\varphi_0}{\partial v} - \frac{\partial}{\partial u}\log\frac{\partial\sigma}{\partial v}\frac{\partial\varphi_0}{\partial v} = 0.$$

Writing

$$(81.)\qquad \varphi_{01} = \frac{1}{\sigma}\varphi, \quad \varphi_{02} = \frac{V_1V_2}{\frac{\partial\sigma}{\partial v}}\varphi$$

(E_{01}) and (E_{02}) have the common reduced form

$$(82.)\qquad \frac{\partial^2\varphi}{\partial u\partial v} - \lambda\varphi = 0$$

the same as (74.). In the present case, then it is only necessary to study equation (82.) of which σ is a particular solution and in (81.) φ denotes the general integral. If σ is a particular integral of (82.) it will be observed that $\frac{1}{V_1V_2}\frac{\partial\sigma}{\partial v}$ is also a particular integral. For writing

$$\psi = \frac{1}{V_1V_2}\frac{\partial\sigma}{\partial v}$$

we have

$$\frac{\partial\psi}{\partial u} = \frac{1}{V_1V_2}\frac{\partial^2\sigma}{\partial u\partial v} = \frac{\lambda\sigma}{V_1V_2} = U_1U_2\sigma,$$

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial u\partial v} = U_1U_2\frac{\partial\sigma}{\partial v} = \lambda\psi$$

which proves the statement.

Eliminating φ from (81.) we have

$$(83.)\qquad \varphi_{01} = \frac{1}{V_1V_2}\frac{\partial\log\sigma}{\partial v}\varphi_{02} =, \text{ say, } \psi\varphi_{02},$$

if we choose φ_{01} and φ_{02} as the particular integrals $\frac{1}{\varrho_1}$ and $\frac{1}{\varrho_2}$ respectively we shall have for each particular integral σ the relation

$$\frac{1}{\varrho_1} = \frac{1}{\sigma}\cdot\frac{\partial\sigma}{\partial v}\frac{1}{V_1V_2}\cdot\frac{1}{\varrho_2}\cdot$$

Now

$$\sigma U_1 = \sqrt{E}, \quad \frac{1}{V_2}\frac{\partial\sigma}{\partial v} = \sqrt{G}$$

then

$$(84.)\qquad \frac{\sqrt{E}}{\varrho_1} = \frac{U_1}{V_1}\frac{\sqrt{G}}{\varrho_2}$$

or

$$(84'.)\qquad \begin{vmatrix} U_1 & V_1 \\ \frac{\sqrt{E}}{\varrho_1}, & \frac{\sqrt{G}}{\varrho_2} \end{vmatrix} = 0.$$

Gauss's relation is now

$$(85.)\qquad \frac{\sqrt{EG}}{\varrho_1\varrho_2} = -\frac{\partial}{\partial u}U_2V_1 - \frac{\partial}{\partial v}U_1V_2.$$

It is easy to see that we shall be conducted to equations (56.) and the following ones if we suppose the invariants h_{01}, k_{01} equated to those of any one of the following equations of the series. Suppose for example we make $h_{01} = h_{21}$, $k_{01} = k_{21}$; then since $k_{21} = h_{11} = h_{02}$ we have $h_{02} = k_{01}$ that is

$$(86.)\qquad \frac{\partial^2}{\partial u\partial v}\log\frac{\sqrt{G}}{R_u} = \frac{\partial^2}{\partial u\partial v}\log\frac{\sqrt{E}}{R_v}.$$

Now $h_{01} = h_{21}$ and $k_{01} = k_{21}$ give

$$(87.)\qquad \begin{cases} \frac{\partial^2}{\partial u\partial v}\log\frac{\sqrt{E}}{R_v} + \frac{\partial^2}{\partial u\partial v}\log\left[\frac{\sqrt{EG}}{R_uR_v} - \frac{\partial^2}{\partial u\partial v}\log\frac{\sqrt{E}}{R_v}\right] = 0, \\ \frac{\partial^2}{\partial u\partial v}\log\frac{\sqrt{E}}{R_v} - \frac{\partial^2}{\partial u\partial v}\log\frac{\sqrt{EG}}{R_uR_v} = 0. \end{cases}$$

This last gives

$$(88.)\qquad \frac{\sqrt{G}}{R_u} = U_1V_1,$$

and (86.) gives now

$$(89.)\qquad \frac{\sqrt{E}}{R_v} = U_2V_2.$$

We are therefore conducted to the case just studied and it is easy to see that we should arrive at the same results if we had made the hypothesis $h_{01} = h_{i1}$, $k_{01} = k_{i1}$, $i > 2$.

Suppose again that we have

$$h_{01} = k_{02}, \quad h_{02} = k_{01}.$$

The first of these is already satisfied and the second gives immediately

$$(90.)\qquad \frac{\partial G}{\partial u} \div \frac{\partial E}{\partial v} = V_1^2 \div U_1^2$$

and we can write

$$E = U_1^2 \frac{\partial \Theta}{\partial u}, \quad G = V_1^2 \frac{\partial \Theta}{\partial v}.$$

If we assume

$$\Theta = \int U du - \int V dv + Uv - Vu$$

we have

$$ds^2 = (U-V)[U_1^2 du^2 + V_1^2 dv^2],$$

Liouvilles form. But as in this case it is known that u and v are the parameters of geodesic ellipses and hyperbolas and that they are also the parameters of the lines of curvature we are led to quadric surfaces.

Suppose now the first of *Laplaces* series to terminate both ways with the equations (E_{-11}) and (E_{11}); we must have for this

$$(91.) \qquad h_{-11} = k_{01} = 0, \quad h_{11} = h_{02} = 0$$

or

$$(92.) \qquad \begin{cases} \dfrac{\sqrt{EG}}{R_u R_v} - \dfrac{\partial^2}{\partial u \partial v} \log \dfrac{\sqrt{E}}{R_v} = 0, \\[2ex] \dfrac{\sqrt{EG}}{R_u R_v} - \dfrac{\partial^2}{\partial u \partial v} \log \dfrac{\sqrt{G}}{R_u} = 0 \end{cases}$$

or

$$(93). \qquad \frac{\sqrt{EG}}{R_u R_v} = \frac{\partial^2}{\partial u \partial v} \log \frac{\sqrt{E}}{R_v} = \frac{\partial^2}{\partial u \partial v} \log \frac{\sqrt{G}}{R_u}.$$

From the last two we have as above

$$(94.) \qquad \begin{cases} \dfrac{\dfrac{\partial G}{\partial u}}{\dfrac{\partial E}{\partial v}} = \dfrac{V_1^2}{U_1^2}, \\[2ex] E = U_1^2 \dfrac{\partial \Theta}{\partial u}, \quad G = V_1^2 \dfrac{\partial \Theta}{\partial v} \end{cases}$$

$$(95.) \qquad \frac{\sqrt{G}}{R_v} = -\frac{1}{2} \frac{\dfrac{\partial^2 \Theta}{\partial u \partial v}}{\dfrac{\partial \Theta}{\partial u}}, \quad \frac{\sqrt{E}}{R_u} = -\frac{1}{2} \frac{\dfrac{\partial^2 \Theta}{\partial u \partial v}}{\dfrac{\partial \Theta}{\partial u}}.$$

For the determination of Θ we have from

$$(96.) \qquad 2 \frac{\sqrt{EG}}{R_u R_v} = \frac{\partial^2}{\partial u \partial v} \log \frac{\sqrt{EG}}{R_u R_v}$$

or

$$(97.)\qquad \frac{1}{2}\frac{\left(\frac{\partial^2\Theta}{\partial u\partial v}\right)^2}{\frac{\partial\Theta}{\partial u}\frac{\partial\Theta}{\partial v}} = \frac{\partial^2}{\partial u\partial v}\log\frac{\left(\frac{\partial^2\Theta}{\partial u\partial v}\right)^2}{\frac{\partial\Theta}{\partial u}\frac{\partial\Theta}{\partial v}}.$$

Writing

$$(98.)\qquad \frac{\left(\frac{\partial^2\Theta}{\partial u\partial v}\right)^2}{\frac{\partial\Theta}{\partial u}\frac{\partial\Theta}{\partial v}} = 4\varphi$$

we find readily for φ the equation

$$(99.)\qquad \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{\varphi}\frac{\partial\varphi}{\partial u}\right) = 2\varphi$$

or writing

$$\varphi = e^{2\Omega}$$

$$(100.)\qquad \frac{\partial^2\Omega}{\partial u\partial v} = e^{2\Omega}.$$

When we determine φ from this last equation the integration of (98.), which has already been considered, will conduct to the linear element. Equation (100.) is *Liouvilles* equation

$$\frac{\partial^2\Omega}{\partial u\partial v} = e^{2\lambda\Omega}$$

for $\lambda = 1$. The value of φ having been obtained we still have to integrate equation (98.) viz.

$$(98.)\qquad \left(\frac{\partial^2\Theta}{\partial u\partial v}\right)^2 = 4\varphi(u, v)\frac{\partial\Theta}{\partial u}\frac{\partial\Theta}{\partial v}$$

which is a generalized form of (70.). Using again the substitutions

$$\frac{\partial\Theta}{\partial u} = \sigma^2, \quad \frac{\partial\Theta}{\partial v} = \tau^2$$

(98.) gives the simultaneous system

$$(101.)\qquad \begin{cases} \frac{\partial\sigma}{\partial v} = \sqrt{\varphi}\,\tau, \\ \frac{\partial\tau}{\partial u} = \sqrt{\varphi}\,\sigma; \end{cases}$$

from these follows at once

$$(102.)\qquad \frac{\partial^2\sigma}{\partial u\partial v} - \frac{\partial\log\sqrt{\varphi}}{\partial u}\frac{\partial\sigma}{\partial v} - \varphi\sigma = 0.$$

As before if σ is an integral of this, we have for Θ the formula

$$\Theta = \int \sigma^2 du + \int \frac{1}{\varphi}\left(\frac{\partial\sigma}{\partial v}\right)^2 dv. \tag{103.}$$

Denote equation (102.) by (E) and form the corresponding *Laplaces* series.

$(E_{-i}),\ \ldots,\ (E_{-2}),\ (E_{-1}),\ (E),\ (E_1),\ (E_2),\ \ldots,\ (E_i).$

We have for the invariants of (E) the values

$$\begin{cases} h = \varphi, \\ k = \varphi - \dfrac{\partial^2 \log\sqrt{\varphi}}{\partial u \partial v}; \end{cases} \tag{104.}$$

for the invariants of (E_1) we find at once

$$h_1 = k, \quad k_1 = h \tag{105.}$$

that is *the invariants of the first equation of the positive end of Laplaces series are the same as those of the adjoint of* (E).

Going on and forming the invariants of (E_2) by *Darbouxs* formulae,

$$\begin{cases} h_2 = 2h_1 - k_1 - \dfrac{\partial^2 \log h_1}{\partial u \partial v}, \\ k_2 = h_1, \end{cases}$$

and

$$\begin{cases} h_{-1} = k \\ k_{-1} = 2k - h - \dfrac{\partial^2 \log k}{\partial u \partial v} \end{cases}$$

we find at once

$$h_2 = k_{-1}, \quad k_2 = h_{-1};$$

and in general

$$h_{i+1} = k_{-i}, \quad k_{i+1} = h_{-i};$$

that is *the invariants of the equation of the positive end of Laplaces series are those of the adjoint to the equation* (E_{-i}) *of the negative end of the series**).

*) I had originally given here a more extended study of the properties of equation (102.) but since the above was written and before it could be printed there has appeared a paper by ***Goursat**: Sur une équation aux dérivées partielles,* in the Bull. de la Soc. Math. de France t. XXV, p. 36 in which appears a full account of this type of equations; the reader is therefore referred to the latter.

$$(110.)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial^2\varphi_{01}}{\partial u\partial v} - \dfrac{\partial}{\partial u}\log\dfrac{\sqrt{E}}{R_v}\dfrac{\partial\varphi_{01}}{\partial v} - \dfrac{\sqrt{EG}}{R_u R_v}\varphi_{01} = 0, \\ \dfrac{\partial^2\varphi_{02}}{\partial u\partial v} - \dfrac{\partial}{\partial v}\log\dfrac{\sqrt{G}}{R_u}\dfrac{\partial\varphi_{02}}{\partial u} - \dfrac{\sqrt{EG}}{R_u R_v}\varphi_{02} = 0; \end{cases}$$

here the particular integrals instead of being $\frac{1}{\varrho_1}$ and $\frac{1}{\varrho_2}$ respectively are $\frac{\sqrt{E}}{\varrho_1}$ and $\frac{\sqrt{G}}{\varrho_2}$.

If in the first of these we assume

$$(111.)\quad \frac{\sqrt{E}}{R_v} = \frac{\sqrt{G}}{R_u},$$

that is

$$(112.)\quad \frac{\partial E}{\partial v} = \frac{\partial G}{\partial u},$$

it becomes

$$(113.)\quad \frac{\partial^2\varphi_{01}}{\partial u\partial v} - \frac{\partial}{\partial u}\log\frac{\sqrt{E}}{R_v}\frac{\partial\varphi_{01}}{\partial v} - \left(\frac{\sqrt{E}}{R_v}\right)^2\varphi_{01} = 0$$

which is of the same form as (102.) with

$$(114.)\quad \varphi = \left(\frac{\sqrt{E}}{R_r}\right)^2 = \frac{1}{4EG}\left(\frac{\partial E}{\partial v}\right)^2,$$

and the invariants are

$$(115.)\quad h_{01} = \frac{E}{R^2_v},\quad k_{01} = \frac{E}{R^2_v} - \frac{\partial^2}{\partial u\partial v}\log\frac{\sqrt{E}}{R_v}.$$

The second of (110.) becomes

$$(116.)\quad \frac{\partial^2\varphi_{02}}{\partial u\partial v} - \frac{\partial}{\partial v}\log\frac{\sqrt{E}}{R_v}\frac{\partial\varphi_{02}}{\partial u} - \left(\frac{\sqrt{E}}{R_v}\right)^2\varphi_{02} = 0$$

and its invariants are

$$(117.)\quad h_{02} = k_{01},\quad k_{02} = h_{01}$$

that is they are those of the adjoint to (113.). From (112.) we have

$$E du + G dv = d\Theta,$$

so that the linear element is of the form

$$ds^2 = \frac{\partial\Theta}{\partial u}du^2 + \frac{\partial\Theta}{\partial v}dv^2.$$

Der Bodendruck von Sand in verticalen cylindrischen Gefässen.

(Von Herrn *Fritz Kötter*.)

---

§ 1.

Bei keiner Art von Substanzen ist so wenig zur Rechtfertigung unserer Anschauungen über die Natur der Druckkräfte geschehen wie bei den Massen von der Constitution des Sandes. Für die elastischen Körper und für die Flüssigkeiten kennen wir eine ganze Reihe von Vorgängen, welche sich sowohl durch den Versuch als auch mittels der Rechnung genau verfolgen lassen, und in Folge dessen vermag man bei diesen Substanzen wenigstens einigermassen die Grenzen für die Zulässigkeit unserer Annahmen über die Zug- und Druckkräfte anzugeben. Dagegen ist mir aus der Statik des Sandes nur eine solche Aufgabe bekannt geworden, zu deren Lösung sowohl der Versuch als auch die mathematische Entwickelung herangezogen sind, nämlich das Problem, den Seitendruck von Sandmassen gegen Wände zu bestimmen. Wenn nun auch für den bauenden Ingenieur diese Aufgabe die wichtigste der ganzen Lehre vom Erddruck ist, so muss doch vom allgemeinen Gesichtspunkte aus diese Beschränkung entschieden beklagt werden. Selbst bei völliger Unanfechtbarkeit der mathematischen Entwickelungen und bei unbedingter Zuverlässigkeit der physikalischen Methoden würde nämlich meines Erachtens auch die genaueste Uebereinstimmung von Versuchs- und Rechnungsresultat bei dieser einen Aufgabe nicht genügen, um der Theorie den wünschenswerthen Grad von Wahrscheinlichkeit zu verleihen.

Unter diesen Umständen erlangen auch solche Fragen, welche nicht einem unmittelbaren Bedürfniss der Technik entspringen, eine grosse Bedeutung, wenn sie sich einerseits durch passend angestellte Versuche beantworten lassen, während andererseits die Ableitung ihrer Lösung aus der Theorie unsere Kräfte nicht übersteigt. Eine Aufgabe dieser Art ist die

Bestimmung des Bodendrucks von Sand in verticalen cylindrischen Gefässen. Dass sich dieselbe experimentell ziemlich gut behandeln lässt, scheint mir nach den Ergebnissen, welche *Hagen**) und in neuerer Zeit *Forchheimer***) in dieser Richtung erzielt haben, zweifellos. Eine naheliegende Versuchsanordnung, welcher man sich bei dieser Untersuchung bedienen könnte und welche auch dazu benutzt worden ist, stimmt im Princip mit derjenigen für den Beweis des sogenannten hydrostatischen Paradoxons überein. Gegen den unteren Rand einer in verticaler Richtung festgehaltenen Röhre wird durch eine hinreichend grosse nach oben gerichtete Kraft ein Deckel gedrückt, und so ein Gefäss gebildet, in welches Sand gefüllt werden soll. Durch das Experiment wird das Minimum der Kraft gesucht, welches noch gerade genügt, um den Deckel gegen den Druck des Sandes im Gleichgewicht zu halten. So wenig umfangreich das vorliegende Versuchsmaterial auch ist, ein Resultat scheint doch mit Sicherheit daraus hervorzugehen. Mit wachsender Höhe der Sandschicht nähert sich die gesuchte Grösse ausserordentlich schnell einer endlichen Grenze. Dieser Grenzwerth soll im Folgenden mathematisch bestimmt werden. Zwar haben schon früher *Hagen, Forchheimer* und neuerdings *Könen****) den Bodendruck auch theoretisch zu bestimmen gesucht; aber alle drei benutzen ausser der zu Grunde gelegten allgemeinen Hypothese Annahmen, welche einer Rechtfertigung bedurft hätten, und bedenkliche Schlussfolgerungen, welche zum Theil den einfachsten Gesetzen der Mechanik widersprechen. Die Aufgabe, welche im Folgenden behandelt werden soll, muss deshalb als eine bisher ungelöste betrachtet werden.

§ 2.

Zwischen den Druckkräften bestehen bei jeder Substanz zwei Arten von Beziehungen. Die einen sind unabhängig von der besonderen Natur der fraglichen Masse. Sie gelten für die elastischen Körper sowohl als für alle Arten von Flüssigkeiten und auch für die Massen von der Beschaffenheit des Sandes. Diese Beziehungen bringen den folgenden Grundsatz zum Ausdruck: Für jeden beliebigen Theil einer Masse bestehen zwischen den

*) *Hagen*, Untersuchung über den Druck und die Reibung des Sandes. Poggendorff Annalen XXVIII S. 17—48, 297—323; 1833.

**) *Ph. Forchheimer*, über den Sanddruck und Bewegungserscheinungen im Inneren trockenen Sandes. Dissertat. Tübingen 1883.

***) *Könen*, Berechnung des Seiten- und Bodendruckes in Silozellen. Centralblatt der Bauverw. XVI S. 446—447; 1896.

verlorenen Kräften und den zur Oberfläche des Theiles gehörenden Druckkräften dieselben Gleichgewichtsbedingungen, als wenn der betrachtete Theilkörper starr wäre. Unter den verlorenen Kräften haben wir hier die für jedes Massenelement berechneten Differenzen von äusserer Kraft und beschleunigender Kraft zu verstehen, welche im Falle des Gleichgewichts natürlich in die äusseren Kräfte übergehen.

Zu den, wie ich sagen will, rein statischen Beziehungen, welche den Inhalt dieses Princips formelmässig darstellen, kommen nun noch Beziehungen von einer zweiten Art, welche den Ausdruck unserer Vorstellungen über die besondere Beschaffenheit der fraglichen Substanz bilden. So nimmt man an, dass bei den elastischen Körpern die Druckcomponenten lineare Functionen der Deformationscomponenten sind. Dem Wesen der Flüssigkeiten glaubt man durch die Annahme gerecht zu werden, dass jedes Flächenelement orthogonalen Druck erleidet. Bezüglich des Sandes folgt man meist einer von *Coulomb* zuerst ausgesprochenen Meinung und schreibt die Möglichkeit tangentialer Druckcomponenten einer der Reibung ähnlichen Ursache zu. Demgemäss fordert man, dass für kein Flächenelement die Neigung des Druckes zur Normale grösser ist als ein gewisser Winkel φ, welcher zugleich der Winkel der steilsten natürlichen Böschung ist. An den starren Wänden darf die Neigung des Druckes zur Normale natürlich nicht grösser sein als der Reibungswinkel φ_1 der betreffenden Art von Sand auf dem Material der Wand. Bei dieser Auffassung herrscht so lange Gleichgewicht, als sich mindestens ein System von Druckkräften finden lässt, welches sowohl den rein statischen als auch den physikalischen Gleichgewichtsbedingungen genügt. Nennen wir ein System von Grössen der eben bezeichneten Art eine zulässige Druckvertheilung, so können wir diese Gleichgewichtsbedingungen kürzer so aussprechen, dass es mindestens eine zulässige Druckvertheilung geben muss.

Auf den Boden dieser Anschauung wollen auch wir uns stellen und von ihm aus unsere Aufgabe so behandeln, wie es nach meiner Meinung bei jeder Aufgabe der Erddrucktheorie geschehen müsste, nämlich als Aufgabe der Variationsrechnung. An anderer Stelle habe*) ich diese Auffassung der Erddrucktheorie allgemein zu begründen versucht; hier will ich mich darauf beschränken, meine Meinung in Bezug auf das vorliegende besondere Problem zu rechtfertigen.

*) Jahresbericht der Vereinigung deutscher Mathematiker. Bd. II. S. 125 u. ff.

Im Interesse der Genauigkeit soll zunächst eine Voraussetzung, welche oben bei der Beschreibung der Versuchsanordnung mit Stillschweigen übergangen ist, deutlich ausgesprochen werden. Wir wollen nämlich voraussetzen, dass der Deckel sich nur in verticaler Richtung bewegen kann, wie es z. B. der Fall ist, wenn ein Stempel, der in einer Röhre auf und ab geschoben werden kann, den Verschluss bildet. Unter dieser Voraussetzung besteht nach der zu Grunde gelegten Theorie so lange Gleichgewicht, als es eine zulässige Druckvertheilung giebt, bei welcher die Verticalcomponente V des vom Sande gegen den Stempel ausgeübten Druckes nicht grösser ist als die vertical nach oben gerichtete Kraft P, welche den Stempel gegen die mit Sand gefüllte Röhre presst. Den kleinsten zulässigen Werth von P erhält man also, indem man das Minimum von V sucht.

In den oberen Schichten des Sandes ist der Druck und also auch die an den Gefässwänden stattfindende Reibung gering; deshalb wird in den oberen Schichten der Gesammtdruck für den Röhrenquerschnitt von oben nach unten fast ebenso schnell wachsen wie bei reibungslosen Flüssigkeiten. Wenn aber der Druck grösser geworden ist, wird auch die Reibung an den Gefässwänden und ihre Gegenwirkung gegen die durch das Eigengewicht des Sandes bewirkte Druckzunahme stärker geworden sein. Weiter unten wird also die wirklich erfolgende Zunahme des Druckes geringer sein als in den oberen Schichten des Sandes; und wenn der Querschnittsdruck eine gewisse Grösse erreicht hätte, würde sogar die stattfindende Reibung genügen, um der Schwere das Gleichgewicht zu halten, und die weitere Vermehrung des Druckes zu hindern. Diesem Grenzwerth wird also der Querschnittsdruck von oben nach unten zustreben und sich ihm bei hinreichender Höhe der Sandschicht in den unteren Regionen asymptotisch nähern. Indem nun der Gesammtdruck für einen Querschnitt einem gewissen Grenzwerthe zustrebt, wird sich auch die Druckvertheilung einem Grenzzustande nähern, welcher gleichmässig in Bezug auf die Längsrichtung der Röhre ist. Bei der Bestimmung der gesuchten Grenze des Bodendruckminimums wird es genügen, statt der wirklich stattfindenden, von oben nach unten veränderlichen Druckvertheilung diejenige gleichmässige Druckvertheilung aufzusuchen, welcher sie asymptotisch zustrebt.

Eine solche gleichmässige Druckvertheilung liefert nun offenbar für den Gesammtdruck in jedem Querschnitt denselben Werth und entspricht

Reibung und der an der Röhrenwand stattfindenden äusseren Reibung darstellen, ist noch das specifische Gewicht des Sandes von Bedeutung für den Bodendruck; wir wollen dasselbe durch γ bezeichnen. Zur Bestimmung der Lage eines Punktes bedienen wir uns eines rechtwinkligen Coordinatensystems, dessen z-Axe senkrecht nach unten gerichtet ist, dessen x- und y-Axe also in einem Querschnitt der Röhre liegen. Die Componenten des Druckes bezeichnen wir in der durch *Kirchhoff* eingeführten Weise und nennen also X_x, Y_x, Z_x die drei Componenten des Druckes, welchen ein zur x-Axe senkrechtes Flächenelement auf der Seite des kleineren x erfährt. Aehnliche Bedeutung haben die Grössen X_y, Y_y, Z_y und X_z, Y_z, Z_z. Zwischen diesen neun Grössen bestehen zunächst die drei Gleichungen

$$(1.)\qquad Y_z = Z_y,\quad Z_x = X_z,\quad X_y = Y_x,$$

sodass wir es thatsächlich nur mit sechs Grössen zu thun haben, durch welche der Druck an einer Stelle x, y, z bestimmt ist. Im allgemeinen werden dieselben natürlich von allen drei Coordinaten abhängen; in unserem Falle sind sie aber Functionen von x und y allein, welche den specialisirten Differentialgleichungen

$$(2.)\qquad \frac{\partial X_x}{\partial x}+\frac{\partial X_y}{\partial y}=0,\quad \frac{\partial Y_y}{\partial x}+\frac{\partial Y_x}{\partial y}=0,\quad \frac{\partial Z_x}{\partial x}+\frac{\partial Z_y}{\partial y}=\gamma$$

genügen. Irgend ein Flächenelement, dessen nach einer Seite gerichtete Normale die Richtungscosinus α, β, γ hat, erleidet auf der anderen Seite einen Druck, dessen Componenten

$$(3.)\quad X_n = X_x\alpha+X_y\beta+X_z\gamma;\quad Y_n = Y_x\alpha+Y_y\beta+Y_z\gamma,\quad Z_n = Z_x\alpha+Z_y\beta+Z_z\gamma$$

sind. Ein Flächenelement erfährt von beiden Seiten einen Druck von gleicher Grösse und entgegengesetzter Richtung. Also müssen, wenn beim Durchgang durch ein Flächenelement Unstetigkeiten eintreten, vermöge deren die Grössen X_x, Y_y, Z_z, Y_x, Z_y, X_z plötzlich in X'_x, Y'_y, Z'_z, Y'_x, Z'_y, X'_z übergehen, die aus den neuen Grössen gebildeten Ausdrücke X'_n, Y'_n, Z'_n gleich den ursprünglichen sein. Die Druckcomponenten können also beim Durchgang durch ein Flächenelement mit den Richtungscosinus α, β, γ der Normale nur in der Art unstetig werden, dass die drei Grössen

$$\begin{aligned}&(X_x-X'_x)\alpha+(X_y-X'_y)\beta+(X_z-X'_z)\gamma,\\&(Y_x-Y'_x)\alpha+(Y_y-Y'_y)\beta+(Y_z-Y'_z)\gamma,\\&(Z_x-Z'_x)\alpha+(Z_y-Z'_y)\beta+(Z_z-Z'_z)\gamma\end{aligned}$$

sie auf der Richtung des ausgezeichneten Druckes senkrecht stehen muss, sodass also jedes Flächenelement, welches die Richtung des ausgezeichneten Hauptdruckes enthält, orthogonalen Druck erleidet. Sind endlich alle Wurzeln einander gleich, so genügt jede beliebige Richtung den fraglichen Bedingungen, d. h. jedes beliebige Flächenelement erleidet orthogonalen Druck. Für jede Stelle giebt es also mindestens ein System von drei zu einander senkrechten Richtungen orthogonalen Druckes. Die zugehörigen Drucke selbst seien λ_1, λ_2, λ_3, wo wir dahingestellt sein lassen, ob etwa zwei oder gar alle drei einander gleich sind. Nur eins wollen wir ausmachen: es soll nicht etwa ein folgender einen vorhergehenden an Grösse übertreffen.

Die Gleichungen (3.), durch welche die Druckcomponenten für ein beliebiges Flächenelement bestimmt sind, gelten für jedes System orthogonaler Axen und so auch namentlich für ein solches, dessen Richtungen mit denjenigen der für eine Stelle bestimmten drei Hauptdrucke übereinstimmen. Für diese Stelle ist dann

$$X_x = \lambda_1, \qquad Y_y = \lambda_2, \qquad Z_z = \lambda_3$$
$$X_y = Y_x = 0, \quad Y_z = Z_y = 0, \quad Z_x = X_z = 0$$

und ein Flächenelement, dessen Normale mit den drei Hauptdrucken die Richtungscosinus α, β, γ bildet, erleidet also einen Druck, dessen Componenten

$$\lambda_1\alpha, \quad \lambda_2\beta, \quad \lambda_3\gamma$$

sind. Die Grösse dieses Druckes ist also

$$R = \sqrt{\lambda_1^2\alpha^2+\lambda_2^2\beta^2+\lambda_3^2\gamma^2},$$

wo die Wurzel positiv zu nehmen ist, während die Normalcomponente

$$N = \lambda_1\alpha^2+\lambda_2\beta^2+\lambda_3\gamma^2$$

wird.

Damit nun der Winkel, welchen der Druck mit der Normale einschliesst, nirgends grösser als der seiner Natur nach spitze Winkel φ werde, darf N für kein Flächenelement negativ werden, und das ist nur dann möglich, wenn auch der kleinste Hauptdruck λ_3 nicht negativ ist. Ferner darf für kein Flächenelement der Cosinus der Neigung des Druckes zur Normale oder der Quotient N/R kleiner als $\cos\varphi$ werden. Das ist erreicht, wenn das Minimum von N/R diese Bedingung erfüllt.

d. h. der Quotient des grössten zum kleinsten Hauptdrucke, von denen auch der letztere nicht negativ sein darf, muss unter dem Werthe $\frac{1+\sin\varphi}{1-\sin\varphi}$ liegen oder darf demselben höchstens gleichkommen.

Die Normale eines Flächenelementes der Cylinderwand steht senkrecht auf der z-Axe des Coordinatensystems. Wenn man u den Winkel nennt, welchen die nach aussen gerichtete Normale mit der positiven x-Axe einschliesst, so erhalten demgemäss die drei Richtungscosinus die Werthe

$$\alpha = \cos u, \quad \beta = \sin u, \quad \gamma = 0$$

und die Componenten des Druckes werden

$$X_n = X_x \cos u + X_y \sin u, \quad Y_n = Y_x \cos u + Y_y \sin u, \quad Z_n = Z_x \cos u + Z_y \sin u.$$

Die Normalcomponente des Druckes wird also

$$N = X_n \alpha + Y_n \beta + Z_n \gamma = X_x \cos^2 u + 2 X_y \cos u \sin u + Y_y \sin^2 u,$$

während die Resultante

$$R = \{(X_x \cos u + X_y \sin u)^2 + (Y_x \cos u + Y_y \sin u)^2 + (Z_x \cos u + Z_y \sin u)^2\}^{\frac{1}{2}}$$

wird. Ist ν die Neigung des Druckes zur Normale, so ist wieder

$$\cos\nu = \frac{N}{R}.$$

Damit nun ν nicht grösser als der Reibungswinkel φ_1 des Sandes auf dem Material der Cylinderwandung werde, darf $\cos\nu$ nicht kleiner als $\cos\varphi_1$ werden. Das ist natürlich nur so lange eine neue Beschränkung, als φ_1 kleiner ist als φ, sodass man von φ_1 annehmen darf, es sei kleiner oder gleich φ.

Von allen Druckvertheilungen, welche die in diesem Paragraphen formulirten Bedingungen erfüllen, muss nun diejenige bestimmt werden, für welche der Querschnittsdruck d. h. das über den ganzen Querschnitt erstreckte Integral

$$P = \iint Z_z \, dx \, dy$$

ein Minimum wird.

Wenn nun auch die Bestimmung der fraglichen Druckvertheilung für eine beliebige Form des Querschnitts Schwierigkeiten mit sich bringt, welche ich nicht zu überwinden vermochte, so kann man doch eine Eigenschaft sehr leicht beweisen. In den rein statischen Beziehungen und in

den Stetigkeitsbedingungen kommt die Grösse Z_z gar nicht vor. Hat man also eine Druckvertheilung, welche diesen Bedingungen genügt, so wird man bei ihr Z_z variiren können, ohne dass diese Eigenschaft verloren geht. Bezüglich der physikalischen Bedingungen wird sich das nicht mit derselben Allgemeinheit behaupten lassen. So lange aber nicht der Grenzzustand erreicht ist, bei welchem entweder die drei Hauptdrucke gleich Null sind oder das Verhältniss des grössten zum kleinsten Hauptdrucke den zulässigen Grenzwerth $\frac{1+\sin\varphi}{1-\sin\varphi}$ hat, wird man auch Z_z verringern können, ohne dass die physikalische Bedingung aufhört erfüllt zu sein. Zu jeder Druckvertheilung, bei welcher sich nicht die ganze Masse im Grenzzustande des Gleichgewichts befindet, wird man also stets eine andere angeben können, bei welcher überall der Grenzzustand erreicht ist und zugleich der Bodendruck geringer ist. Deshalb wird man die Druckvertheilung mit dem geringsten Bodendruck unter denjenigen Druckvertheilungen zu suchen haben, bei welchen überall der Grenzzustand herrscht.

II.

§ 4.

Wir wenden uns jetzt zunächst dem einfachsten Falle zu, dass der Querschnitt ein von zwei parallelen Geraden begrenzter Spalt ist. Bei ihm darf zunächst unbedenklich angenommen werden, dass sich alles gleichmässig verhält in Bezug auf die Längsrichtung des Gefässes, und dass diejenigen Flächenelemente, welche auf der letzteren senkrecht stehen, orthogonalen Druck erleiden. Den Coordinatenanfangspunkt wollen wir in die Mittellinie eines Querschnitts legen und die letztere zur y-Axe machen. Dann hängen alle Grössen lediglich von x ab, und ferner werden die beiden Grössen X_y und Z_y gleich Null. Die rein statischen Gleichungen reduciren sich in Folge dessen hier auf zwei, nämlich

$$(6.)\qquad \frac{\partial X_x}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial X_z}{\partial x} = \gamma.$$

Wegen der Gleichmässigkeit in Bezug auf die Längsrichtung kommen hier für die Unstetigkeitsbedingung nur solche Flächenelemente in Betracht, welche nicht nur der z-Axe sondern auch der y-Axe parallel sind. Für diese ist $\alpha = 1$, $\beta = 0$, $\gamma = 0$, und demnach reduciren sich die fraglichen Bedingungen hier darauf, dass X_x und X_z stetig sein müssen. Deshalb

hat hier X_x in dem ganzen Gebiete denselben positiven Werth, welchen wir H nennen wollen, und ferner kann

$$(7.) \qquad Z_x = X_z = \gamma(x+a)$$

gesetzt werden, wo a eine Constante bedeutet.

Die Grenzbedingung für die festen Wände, deren Gleichung hier $x = \pm b$ lautet, wenn $2b$ die Breite des Gefässes ist, wird in dem vorliegenden Falle besonders einfach. Da nämlich X_z die tangentiale und X_x die normale Componente des Druckes für die verticale Wand ist, so kann die Grenzbedingung hier geschrieben werden:

$$\operatorname{tang}\varphi_1 \geqq X_z/X_x \geqq -\operatorname{tang}\varphi_1.$$

Sie ist für $x = \pm b$ erfüllt, wenn

$$(8.) \qquad \operatorname{tang}\varphi_1 \geqq \frac{\gamma}{H}(b+|a|)$$

ist, wo $|a|$ den absoluten Betrag von a bezeichnet. In allen diesen Bedingungen kommt Y_y nicht vor; sie werden also in ihrer Gültigkeit durch eine Variation dieser Grösse nicht gestört. Aber auch die physikalische Gleichgewichtsbedingung hält gewissen Variationen von Y_y gegenüber Stich. Da nämlich in unserem Falle Y_x und Y_z gleich Null sind, zerfällt die kubische Gleichung für die drei Hauptdrucke hier in die beiden Gleichungen

$$(9^a.) \qquad Y_y - \lambda = 0$$

$$(9^b.) \qquad (X_x-\lambda)(Z_z-\lambda)-Z_x^2 = 0;$$

es ist also Y_y selbst hier einer der Hauptdrucke. Wenn nun bei irgend einer zulässigen Druckvertheilung in einem Theile des mit Sand erfüllten Raumes Y_y nicht der mittlere Hauptdruck ist, so ist offenbar dort das Verhältniss des grösseren zu dem kleineren der beiden anderen Hauptdrucke geringer als $\frac{1+\sin\varphi}{1-\sin\varphi}$. Bringen wir nun Y_y durch Variation zwischen die beiden anderen Hauptdrucke, so erfüllen ja die beiden Grössen, welche jetzt der grösste und der kleinste Hauptdruck geworden sind, die für das Gleichgewicht des Sandes charakteristische physikalische Bedingung. Z_z und der gesammte Bodendruck sind hierbei ungeändert geblieben. Jeden Werth des letzteren, also namentlich auch das Minimum, können wir demnach unter Voraussetzung einer Druckvertheilung erreichen, bei welcher Y_y überall zwischen den beiden anderen Hauptdrucken liegt. Solche Druckvertheilungen

oder unter Benutzung von (7.):

$$(11.)\quad Z_s = \frac{1}{\cos^2\varphi}\{H(1+\sin^2\varphi)-2\sqrt{H^2\sin^2\varphi-\gamma^2(x+a)^2\cos^2\varphi}\}$$

mit der Massgabe, dass für die Wurzel der positive Werth zu nehmen ist. Damit nun Z_s in dem ganzen Gebiete reell sei, muss das Maximum von $\gamma(x+a)$ kleiner als $H\operatorname{tang}\varphi$, das Minimum dieser Grösse grösser als $-H\operatorname{tang}\varphi$ sein. Diese Bedingung ist dann und nur dann erfüllt, wenn $\gamma(b+|a|)$ kleiner als $H\operatorname{tang}\varphi$ ist. Da aber $\operatorname{tang}\varphi_1$ höchstens $\operatorname{tang}\varphi$ ist, so ist die fragliche Bedingung zugleich mit der unter (8.) aufgeführten Grenzbedingung erfüllt. Ist diese Bedingung für einen Werth von $|a|$ erfüllt, so gilt sie auch für jeden kleineren Werth von $|a|$. Man wird also von einer Druckvertheilung der jetzt betrachteten Art zu einer neuen zulässigen Druckvertheilung gelangen, indem man den absoluten Betrag von a verringert. Es fragt sich, wie sich hierbei der Bodendruck verhält. Für die Längeneinheit des Gefässes ist diese Grösse

$$V = \frac{1}{\cos^2\varphi}\int_{-b}^{+b}\{H(1+\sin^2\varphi)-2\sqrt{H^2\sin^2\varphi-\gamma^2(x+a)^2\cos^2\varphi}\}dx$$

$$= \frac{1}{\cos^2\varphi}\int_{-b+a}^{+b+a}\{H(1+\sin^2\varphi)-2\sqrt{H^2\sin^2\varphi-\gamma^2u^2\cos^2\varphi}\}du.$$

Die nach a genommene Ableitung dieser Grösse ist also

$$\frac{dV}{da} = \frac{2}{\cos^2\varphi}\{\sqrt{H^2\sin^2\varphi-\gamma^2(b-a)^2\cos^2\varphi}-\sqrt{H^2\sin^2\varphi-\gamma^2(b+a)^2\cos^2\varphi}\}.$$

Sie ist negativ für negative Werthe von a und positiv für positive Werthe von a; die Grösse V nimmt also ab, wenn wir den absoluten Betrag von a verringern. Bei der Druckvertheilung mit dem kleinsten Bodendrucke ist also a gleich Null. Jetzt ist noch H zu ermitteln. Damit Z_s überall reell sei, muss bei $a=0$ $H\operatorname{tang}\varphi \geqq \gamma b$ sein. Wir setzen deshalb

$$(12.)\qquad H = \frac{\gamma b \operatorname{cotg}\varphi}{\sin t},$$

wo t einen Winkel zwischen 0 und $\frac{\pi}{2}$ bedeuten soll. Damit auch die Bedingung (8.) erfüllt ist, muss

$$(13.)\qquad \sin t \leqq \frac{\operatorname{tang}\varphi_1}{\operatorname{tang}\varphi}$$

Indem wir denselben differentiiren, erhalten wir

$$-2\sin\varphi\frac{\sin t - t\cos t}{\sin^2 t}$$

und das ist, so lange t in den Grenzen 0 und π liegt, sicher negativ. Deshalb nimmt der unter (20.) angegebene Ausdruck mit wachsendem t von dem positiven Werthe $(1-\sin\varphi)^2$ für $t=0$ bis zum Werthe $-\infty$ für $t=\pi$ beständig ab. Es giebt also zwischen 0 und π sicher einen Werth t_0, für welchen

$$(21.)\qquad 1+\sin^2\varphi-2\sin\varphi\frac{t_0}{\sin t_0} = 0$$

ist. Nun ist zweierlei möglich, entweder ist t_0 gleich oder grösser als t_1, oder es ist t_0 kleiner als t_1. Im ersteren Falle ist $\frac{dV}{dt}$ offenbar in dem ganzen Intervall von 0 bis t_1 negativ, d. h. V nimmt beständig ab, während t von dem kleinsten Werthe 0 bis zu dem grössten zulässigen Werthe t_1 wächst. Hier erhalten wir also den Grenzwerth des Bodendrucks, indem wir für t den Werth t_1 setzen. Wenn aber t_0 kleiner als t_1 ist, so nimmt V nur in dem Intervall von 0 bis t_0 ab, während es von t_0 bis t_1 wächst. In diesem Falle erhalten wir also das Minimum von V für den Werth t_0 der Grösse t.

Das gewonnene Resultat wollen wir noch einmal zusammenfassen. Der Grenzfall des Gleichgewichts tritt ein bei einer Druckvertheilung, für welche X_y und Z_y gleich 0 sind. Y_y ist ein Hauptdruck, welcher zwischen den beiden anderen Hauptdrucken liegt. Diese sind bestimmt durch die Gleichungen

$$\lambda_1 = \tfrac{1}{2}(X_x+Z_z)(1+\sin\varphi),\qquad \lambda_3 = \tfrac{1}{2}(X_x+Z_z)(1-\sin\varphi)$$

mit

$$X_x = \frac{\gamma b \operatorname{cotg}\varphi}{\sin t},\quad X_z = \gamma b\frac{\sin w}{\sin t},\quad Z_z = \frac{\gamma b}{\sin\varphi\cos\varphi\sin t}(1+\sin^2\varphi-2\sin\varphi\cos w),$$

wo w der Gleichung $x = b\,\frac{\sin w}{\sin t}$ genügt. Demnach ist

$$\frac{2\gamma b}{\sin\varphi\sin t}(1-\sin\varphi\cos w)\sqrt{\frac{1+\sin\varphi}{1-\sin\varphi}} \geqq Y_y \geqq \frac{2\gamma b}{\sin\varphi\sin t}(1-\sin\varphi\cos w)\sqrt{\frac{1-\sin\varphi}{1+\sin\varphi}}$$

Der Gesammtbodendruck für die Längeneinheit des Querschni[tts] wird durch die Formel

$$V = \int_{-b}^{+b} Z_z dx = \frac{2\gamma b^2}{\cos\varphi\sin\varphi\sin^2 t}\{(1+\sin^2\varphi)\sin t - \sin\varphi(t+\sin t\cos t)\}$$

bedingte, zulässige Druckvertheilung bekannt, so erhält man ein neues System äusserer Kräfte und eine dazu gehörige zulässige Druckvertheilung, indem man alles nach dem Parameter u zwischen gewissen Grenzen integrirt, vorausgesetzt, dass die obere Grenze einen grösseren Werth als die untere Grenze hat.

Wir wenden uns jetzt dem vorliegenden, besonderen Falle zu. Die Lage eines Punktes bestimmen wir natürlich durch die Cylindercoordinaten ϱ, φ, z, deren Axe mit der Axe des Gefässes zusammenfallen soll. Die Ebene $\varphi = 0$ nehmen wir willkürlich an, ebenso den Sinn der Drehung, in welchem wir die Winkel φ positiv rechnen wollen. Die Druckvertheilung in einem Punkte P bestimmen wir durch die Druckcomponenten für folgendes Axenkreuz. PX' ist die Verlängerung des Radiusvector ϱ, PY' ist die Tangentenrichtung für den durch P gehenden Coordinatenkreis und zwar im Sinne der wachsenden Winkel φ, PZ' ist senkrecht nach unten gerichtet. Wir setzen hier

$$(1.)\begin{cases} (X_x)' = \bar{R}(\varrho, \varphi), \quad (Y_y)' = \bar{\Phi}(\varrho, \varphi), \quad (Z_z)' = \bar{Z}(\varrho, \varphi), \\ (X_y)' = (Y_x)' = \bar{U}(\varrho, \varphi), \quad (Y_z)' = (Z_y)' = \bar{V}(\varrho, \varphi), \quad (Z_x)' = (X_z)' = \bar{T}(\varrho, \varphi) \end{cases}$$

um anzudeuten, dass bei einer für uns in Frage kommenden Druckvertheilung, diese Grössen zwar von ϱ und φ aber nicht von z abhängen können. Die Componenten der äusseren Kraft sind:

$$(X)' = 0, \qquad (Y)' = 0, \qquad Z = \gamma.$$

Da die Ebene $\varphi = 0$ ganz nach Willkür angenommen werden konnte, so gelangen wir zu einer neuen zulässigen Druckvertheilung, indem wir die vorstehenden Formeln auf ein neues System von Cylindercoordinaten beziehen, bei welchem der Nullaxenschnitt gegen denjenigen des ursprünglichen Coordinatensystems um den Winkel u im negativen Sinne gedreht ist. Die Ebene mit der ursprünglichen Coordinate φ hat in dem neuen Coordinatensystem den Bestimmungswerth $\varphi+u$. Bezieht man also die neue Druckvertheilung auf das alte Coordinatensystem, so erhält man folgende von einem Parameter u abhängige Darstellung einer Druckvertheilung

$$(2.)\begin{cases} (X_x)' = \bar{R}(\varrho; \varphi+u), \; (Y_y)' = \bar{\Phi}(\varrho, \varphi+u) (Z_z)' = \bar{Z}_z(\varphi+\varphi+u) \\ (X_y)' = (Y_x)' = \bar{U}(\varrho, \varphi+u), \quad (Y_z)' = (Z_y)' = \bar{V}(\varrho, \varphi+u), \\ (Z_x)' = (X_z)' = \bar{T}(\varrho, \varphi+u), \\ (X)' = (Y)' = 0, \; Z = \gamma. \end{cases}$$

Nach den obigen Ausführungen gelangen wir zu einem neuen System zulässiger innerer und äusserer Kräfte, indem wir die vorstehenden Functionen von u durch 2π dividiren und dann nach u innerhalb der Grenzen 0 und 2π integriren. Die zu integrirenden Functionen sind aber bezüglich φ periodisch um die Grösse 2π. Da nun für solche Functionen die Formel

$$\int_0^{2\pi} F(\varphi+u)\,du = \int_\varphi^{2\pi+\varphi} F(u)\,du = \int_\varphi^{2\pi} F(u)\,du + \int_0^\varphi F(2\pi+u)\,du$$
$$= \int_\varphi^{2\pi} F(u)\,du + \int_0^\varphi F(u)\,du = \int_0^{2\pi} F(u)\,du$$

gilt, so erhält man durch dieses Verfahren eine von φ unabhängige Druckvertheilung, deren Componenten sind:

$$(3.)\quad \begin{cases} (X_x)' = R = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} \overline{R}(\varrho, u)\,du, & (Y_y)' = \Phi = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} \overline{\Phi}(\varrho, u)\,du, \\ (Z_z)' = Z_z = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} \overline{Z}_z(\varrho, u)\,du, & (X_y)' = (Y_x)' = U = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} \overline{U}(\varrho, u)\,du, \\ (Z_y)' = (Y_z)' = V = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} \overline{V}(\varrho, u)\,du, & (Z_x)' = (X_z)' = T = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} \overline{T}(\varrho, u)\,du. \end{cases}$$

Dabei haben die Componenten der äusseren Kraft ihre Werthe unverändert beibehalten.

Eine noch einfachere Druckvertheilung können wir aus der vorstehenden in Folge des Umstandes ableiten, dass der Sinn, in welchem der Winkel φ als positiv gerechnet wird, willkürlich ist. Wir erhalten also eine neue Druckvertheilung, indem wir die Formeln (3.) auf ein Coordinatensystem beziehen, bei welchem die Winkel φ in der dem ursprünglichen Sinne entgegengesetzten Richtung als positiv gerechnet werden. Wollen wir aber die neue Druckvertheilung auf das alte Coordinatensystem beziehen, so müssen wir offenbar das Zeichen von $(X_y)'$ und $(Z_y)'$ ändern und erhalten so folgende Druckvertheilung

$$(4.)\quad \begin{cases} (X_x)' = R, \quad (Y_y)' = \Phi, \quad (Z_z)' = Z_z = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} Z_z(\varrho, u)\,du \\ (X_y)' = (Y_x)' = -U, \quad (Z_y)' = (Y_z)' = -V, \quad (Z_x)' = (X_z)' = T. \end{cases}$$

Schliesslich nehmen wir aus den beiden unter (3.) und (4.) angegebenen Druckvertheilungen das arithmetische Mittel und gelangen so zu der vereinfachten Druckvertheilung:

$$
(5.) \quad \begin{cases}
(X_x)' = R = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \bar{R}(\varrho, u)du, \qquad (Y_y)' = \Phi = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \bar{\Phi}(\varrho, u)du, \\
(Z_z)' = Z_z = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \bar{Z}_z(\varrho, u)du, \\
(X_y)' = (Y_x)' = 0, \qquad (Z_y)' = (Y_z)' = 0, \\
(X_z)' = (Z_x)' = T = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \bar{T}(\varrho, u)du.
\end{cases}
$$

Da hier $(X_y)'$ und $(Z_y)'$ verschwinden, so erleidet jetzt jedes Element eines Axenschnittes orthogonalen Druck. Der Werth des Bodendrucks ist bei der neuen Druckvertheilung

$$V = \int_0^{\nu}\int_0^{2\pi}(Z_z)'\varrho d\varrho d\varphi = 2\pi\int_0^{\nu} Z_z \varrho\, d\varrho = \int_0^{\nu}\int_0^{2\pi}\bar{Z}_z(\varrho, u)\varrho d\varrho du.$$

Der rechts stehende Ausdruck ist aber nichts anderes als der zu der ursprünglichen Druckvertheilung gehörende Bodendruck. Jeder Werth des Bodendrucks, welcher zu einer beliebigen zulässigen Druckvertheilung gehört — und solche kommen ja im Falle des Gleichgewichts allein in Betracht — lässt sich also auch durch eine Druckvertheilung erreichen, welche gleichmässig in Bezug auf die z-Axe ist und bei welcher die Elemente der Axenschnitte orthogonalen Druck erleiden. Deshalb dürfen und wollen wir uns bei der Bestimmung des Bodendruckminimums auf die Betrachtung solcher specieller Druckvertheilung beschränken.

§ 6.

Die Zahl der rein statischen Gleichgewichtsbedingungen, welche im allgemeinen gleich drei ist, reducirt sich bei einer gleichmässigen Druckvertheilung auf zwei. Betrachtet man nämlich einen elementaren Theil unserer Sandmasse, welcher von zwei benachbarten horizontalen Ebenen, zwei unendlich wenig gegen einander geneigten Axenschnitten und zwei unendlich nahen zur Begrenzung conaxialen Cylindern begrenzt wird, so erkennt man sofort, dass alle Kräfte, welche auf das Körperelement

wirken, sich zu Resultanten vereinigen, welche in dem halbirenden Axenschnitte des Körperelementes liegen. Demnach ist die Bedingung, dass die Summe der zum mittleren Axenschnitte senkrechten Componenten gleich Null ist, von selbst erfüllt und fällt also fort. Um nun die beiden übrig bleibenden Beziehungen zu ermitteln, betrachten wir einen Cylinder vom Radius ϱ und der Höhe h, dessen Axe mit derjenigen des Gefässes zusammenfällt. Das Eigengewicht und alle auf die Oberfläche dieses Theiles der Sandmasse wirkenden Druckkräfte vereinigen sich offenbar zu einer in der Axe liegenden Resultante. Die einzige statische Beziehung, welche wir aus der Betrachtung dieses Cylinders schöpfen können, ist die, dass die Summe der verticalen Componenten der eben genannten Kräfte gleich Null ist. Vertical gerichtet sind nun erstlich die Normalcomponenten des Druckes für den oberen und den unteren ebenen Theil der Begrenzung; beide sind gleich und entgegengesetzt gerichtet, heben sich also auf und fallen von selbst aus dem Ansatz fort. Ferner ist senkrecht gerichtet und zwar nach oben die Tangentialcomponente T des Druckes auf den Cylindermantel, welche zusammengefasst eine Kraft von der Grösse

$$2 Th\varrho\pi$$

liefert. Die letzte verticale Kraft, das Eigengewicht, ist nach unten gerichtet und hat die Grösse

$$\gamma\varrho^2 h\pi.$$

Demnach ist

$$T = \tfrac{1}{2}\gamma\varrho \tag{6.}$$

oder

$$\frac{dT\varrho}{d\varrho} = \gamma\varrho. \tag{6.a}$$

Um nun die zweite statische Beziehung abzuleiten, zerlegen wir den Cylinder durch einen Axenschnitt in zwei Theile und betrachten die horizontalen Kräfte, welche auf einen der beiden Theile wirken. Die horizontalen Kräfte für die wagerechten Theile der Begrenzung sind wieder gleich und entgegengesetzt gerichtet und brauchen also, da sie sich gegenseitig aufheben, nicht berechnet zu werden. Zur Bestimmung der Resultante des gleichmässig über den cylindrischen Theil der Begrenzung vertheilten Normaldrucks R stellen wir eine hydrostatische Betrachtung an. Bekanntlich bleibt eine in Ruhe befindliche flüssige Masse im Gleichgewicht, wenn auf dieselbe keine anderen äusseren Kräfte wirken als ein gleichmässig

vertheilter Oberflächendruck. Wir wollen uns nun eine flüssige Ma vorstellen, welche dieselbe Form hat wie der betrachtete Theil unse Sandmasse und unter dem Einflusse eines gleichmässig vertheilten Druck R steht. Der Druck ist horizontal gerichtet gegen den Cylindermantel u gegen den Axenschnitt. Die Resultanten des Druckes müssen für bei also gleich und entgegengesetzt gerichtet sein, und da die Resultante d Druckes für den Axenschnitt offenbar gleich

$$R 2 \varrho h$$

ist, so hat auch ein gleichmässig über den Cylindermantel vertheilter Dru eine Resultante von der bezeichneten Grösse, welche senkrecht gegen d Axenschnitt gerichtet ist. Beim Sande muss dieser Kraft durch die Resulta des Druckes Φ auf den Axenschnitt das Gleichgewicht gehalten werd Da nun für den halben Axenschnitt dieselbe offenbar gleich

$$h \int_0^\varrho \Phi d\varrho$$

ist, so gilt die Gleichung

$$(7.) \qquad R\varrho = \int_0^\varrho \Phi d\varrho$$

oder

$$(7_a.) \qquad \Phi = \frac{dR\varrho}{d\varrho}.$$

Es ist noch hinzuzufügen, dass zwar R und T stetige Function von ϱ sein müssen, dass aber bei Φ und Z_z Unstetigkeiten nicht a geschlossen sind.

§ 7.

Die kubische Gleichung für die drei Hauptdrucke wird jetzt

$$\begin{vmatrix} R-\lambda & 0 & T \\ 0 & \Phi-\lambda, & 0 \\ T & 0 & Z_z-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

und zerfällt also in die beiden Factoren

$$\Phi-\lambda = 0 \text{ und } (R-\lambda)(Z_z-\lambda)-T^2 = 0.$$

Demnach ist Φ selbst einer der drei Hauptdrucke; den grösser

wird. Lösen wir nun die quadratische Gleichung für λ' und λ'' auf, erhalten wir

$$\lambda' = \tfrac{1}{2}\{R+Z_z+\sqrt{(R-Z_z)^2+4T^2}\},$$
$$\lambda'' = \tfrac{1}{2}\{R+Z_z-\sqrt{(R-Z_z)^2+4T^2}\}.$$

Aus (10.) folgt dann weiter

$$(11.)\qquad (R+Z_z)\sin\psi = \sqrt{(R-Z_z)^2+4T^2},$$

$$(11_a.)\qquad \lambda' = \tfrac{1}{2}(R+Z_z)(1+\sin\psi),$$

$$(11_b.)\qquad \lambda'' = \tfrac{1}{2}(R+Z_z)(1-\sin\psi).$$

Mit diesen Werthen erhält man aus (9.) die Beziehung:

$$\tfrac{1}{2}(R+Z_z)(1-\sin\psi)\frac{1+\sin\varphi}{1-\sin\varphi} \geqq \Phi \geqq \tfrac{1}{2}(R+Z_z)(1+\sin\psi)\frac{1-\sin\varphi}{1+\sin\varphi}.$$

Setzen wir hierin für Z_z den Werth, welchen Gl. (11.) liefert, näm

$$(12.)\qquad Z_z = \frac{R(1+\sin^2\psi)+2\sqrt{R^2\sin^2\psi-T^2\cos^2\psi}}{\cos^2\psi},$$

so folgt aus (11.):

$$(13.)\ \frac{R+\sqrt{R^2\sin^2\psi-T^2\cos^2\psi}}{1+\sin\psi}\frac{1+\sin\varphi}{1-\sin\varphi} \geqq \Phi \geqq \frac{R+\sqrt{R^2\sin^2\psi-T^2\cos^2\psi}}{1-\sin\psi}\frac{1-\text{si}}{1+\text{si}}$$

Bedenken wir nun noch, dass $\Phi = \frac{dR\varrho}{d\varrho}$ ist, so nimmt die physikalis Gleichgewichtsbedingung die Form an:

$$(14.)\frac{R+\sqrt{R^2\sin^2\psi-T^2\cos^2\psi}}{1+\sin\psi}\frac{1+\sin\varphi}{1-\sin\varphi} \geqq \frac{dR\varrho}{d\varrho} \geqq \frac{R+\sqrt{R^2\sin^2\psi-T^2\cos^2\psi}}{1-\sin\psi}\frac{1-\text{s}}{1+\text{s}}$$

wo, um es noch einmal zu sagen, ψ einen positiven, spitzen Winkel zeichnet, dessen Grösse φ nicht übertrifft. Die Grösse T ist durch Gleich (6.), Φ durch (7_a.) und Z_z durch (12.) bestimmt.

Von den Druckvertheilungen, welche diesen Bedingungen genü haben wir diejenige zu bestimmen, für welche

$$V = 2\pi\int_0^r Z_z\varrho d\varrho$$

ein Minimum wird. Wir werden diese Aufgabe lösen, indem wir von e ganz beliebigen zulässigen Druckvertheilung ausgehend, die letztere u

beständiger Verkleinerung des Bodendrucks allmählich variiren und dadurch schliesslich in eine ganz bestimmte Druckvertheilung überführen. Diese ist dann offenbar diejenige Druckvertheilung, welche das Minimum des Bodendrucks liefert.

§ 8.

Wir dürfen, so lange die Bedingung (14.) noch Spielraum gewährt, den Winkel ψ variiren, ohne dass wir R und Φ ändern. Dagegen wird wegen der Gleichung (12.) Z_ξ seinen Werth ändern. Um die Veränderung, welche eintritt, besser übersehen zu können, wollen wir die Grössen, auf welche es uns ankommt:

$$K = \frac{R+\sqrt{R^2\sin^2\psi - T^2\cos^2\psi}}{1+\sin\psi},$$

$$K_1 = \frac{R+\sqrt{R^2\sin^2\psi - T^2\cos^2\psi}}{1-\sin\psi},$$

$$V = \frac{R(1+\sin^2\psi)+2\sqrt{R^2\sin^2\psi - T^2\cos\psi}}{\cos^2\psi}$$

$$= K+K_1-R,$$

durch eine Hülfsgrösse

$$(15.)\qquad t = \frac{\sqrt{R^2\sin^2\psi - T^2\cos^2\psi}}{\sqrt{R^2+T^2}\sin\psi+\sqrt{T^2}} = \sqrt{\frac{\sqrt{R^2+T^2}\sin\psi-\sqrt{T^2}}{\sqrt{R^2+T^2}\sin\psi+\sqrt{T^2}}}$$

darstellen, in welcher den Wurzeln $\sqrt{R^2+T^2}$ und $\sqrt{T^2}$ ihr positiver Werth beigelegt werden soll. Dann wird

$$\sin\psi = \frac{1+t^2}{1-t^2}\,\frac{\sqrt{T^2}}{\sqrt{R^2+T^2}},\qquad \sqrt{R^2\sin^2\psi - T^2\cos^2\psi} = \frac{2t}{1-t^2}\sqrt{T^2},$$

$$K = \frac{R(1-t^2)+2t\sqrt{T^2}}{\sqrt{R^2+T^2}(1-t^2)+(1+t^2)\sqrt{T^2}}\sqrt{R^2+T^2}$$

$$= \frac{\sqrt{\sqrt{R^2+T^2}+\sqrt{T^2}}\sqrt{\sqrt{R^2+T^2}-\sqrt{T^2}}(1-t^2)+t\{(\sqrt{R^2+T^2}+\sqrt{T^2})-(\sqrt{R^2+T^2}-\sqrt{T^2})\}}{(\sqrt{R^2+T^2}+\sqrt{T^2})-t^2(\sqrt{R^2+T^2}-\sqrt{T^2})}\sqrt{R^2+T^2}$$

$$(16.)\qquad K = \frac{\sqrt{\sqrt{R^2+T^2}-\sqrt{T^2}}+t\sqrt{\sqrt{R^2+T^2}+\sqrt{T^2}}}{\sqrt{\sqrt{R^2+T^2}+\sqrt{T^2}}+t\sqrt{\sqrt{R^2+T^2}-\sqrt{T^2}}}\cdot\sqrt{R^2+T^2}.$$

Auf dieselbe Weise ergiebt sich:

$$(16^a.)\qquad K_1 = \frac{\sqrt{\sqrt{R^2+T^2}+\sqrt{T^2}}-t\sqrt{\sqrt{R^2+T^2}-\sqrt{T^2}}}{\sqrt{\sqrt{R^2+T^2}-\sqrt{T^2}}-t\sqrt{\sqrt{R^2+T^2}+\sqrt{T^2}}}\cdot\sqrt{R^2+T^2}.$$

Die Ableitungen beider Grössen sind:

$$17.)\qquad \frac{dK}{dt} = \frac{2\sqrt{T^2}\sqrt{R^2-T^2}}{\left(\sqrt{\sqrt{R^2+T^2}+\sqrt{T^2}}+t\sqrt{\sqrt{R^2+T^2}-\sqrt{T^2}}\right)^2},$$

$$18.)\qquad \frac{dK_1}{dt} = \frac{2\sqrt{T^2}\sqrt{R^2-T^2}}{\left(\sqrt{\sqrt{R^2+T^2}-\sqrt{T^2}}-t\sqrt{\sqrt{R^2+T^2}+\sqrt{T^2}}\right)^2},$$

und da diese Grössen sicher positiv sind, so wachsen K und K_1 und fol[gli]ch $Z_2 = K + K_1 - R$, während t innerhalb der beiden Grenzen

$$-\frac{\sqrt{\sqrt{R^2+T^2}+\sqrt{T^2}}}{\sqrt{\sqrt{R^2+T^2}-\sqrt{T^2}}} \quad \text{und} \quad +\frac{\sqrt{\sqrt{R^2+T^2}-\sqrt{T^2}}}{\sqrt{\sqrt{R^2+T^2}+\sqrt{T^2}}}$$

zunimmt. Innerhalb dieser beiden Grenzen bewegt sich aber t thatsächli[ch]. Denn der Bruch, welcher nach der Definitionsgleichung (15.) gleich t^2 i[st], nämlich

$$\frac{\sqrt{R^2+T^2}\sin\psi-\sqrt{T^2}}{\sqrt{R^2+T^2}\sin\psi+\sqrt{T^2}},$$

wird um so grösser, je grösser $\sin\psi$ wird und kann also höchstens gleich

$$\frac{\sqrt{R^2+T^2}\sin\varphi-\sqrt{T^2}}{\sqrt{R^2+T^2}\sin\varphi+\sqrt{T^2}}$$

sein. Demnach liegt t in den Grenzen

$$-\frac{\sqrt{\sqrt{R^2+T^2}+\sqrt{T^2}}}{\sqrt{\sqrt{R^2+T^2}-\sqrt{T^2}}} < -\frac{\sqrt{R^2\sin^2\varphi-T^2\cos^2\varphi}}{\sqrt{R^2+T^2}\sin\varphi+\sqrt{T^2}} < t < \frac{\sqrt{R^2\sin^2\varphi-T^2\cos^2\varphi}}{\sqrt{R^2+T^2}\sin\varphi+\sqrt{T^2}} < \frac{\sqrt{\sqrt{R^2+T^2}-\sqrt{T^2}}}{\sqrt{\sqrt{R^2+T^2}+\sqrt{T^2}}}$$

Wir werden also Z_2 und damit auch V nach Möglichkeit vermindern, indem wir t so nahe an

$$-\frac{\sqrt{R^2\sin^2\varphi-T^2\cos^2\varphi}}{\sqrt{R^2+T^2}\sin\varphi+\sqrt{T^2}}$$

bringen, als es die Bedingung (14.), welche wir auch

$$K\frac{1+\sin\varphi}{1-\sin\varphi} \geqq \frac{dR\varrho}{d\varrho} \geqq K_1\frac{1-\sin\varphi}{1+\sin\varphi}$$

schreiben können, nur immer erlaubt. In denjenigen Theilen des Gebiete[s], in welchen der kleinste Werth von

$$\frac{R+\sqrt{R^2\sin^2\psi-T^2\cos^2\psi}}{1+\sin\psi}\,\frac{1+\sin\varphi}{1-\sin\varphi},$$

nämlich

$$\frac{R-\sqrt{R^2\sin^2\varphi-T^2\cos^2\varphi}}{1-\sin\varphi}$$

als rechtwinklige Coordinaten eines Punktes benutzen. Jeder Druck theilung entspricht dann eine Linie in der Ebene der Coordinaten. A umgekehrt kann man auch aus dieser Linie die reducirte Druckvertheil auf welche die vorhergehenden Betrachtungen uns geführt haben, v ständig ableiten. Zunächst ist natürlich R aus (21.) unmittelbar abzule Ferner ist $T=\frac{1}{2}\gamma\varrho$ und

$$\Phi = \frac{dR\varrho}{d\varrho} = \tfrac{1}{2}\gamma\,\frac{dS\varrho}{d\varrho};$$

beide Grössen sind also völlig bestimmt. Nun ist aber zweierlei mög Entweder ist gemäss Formel (20ᵃ.) in einem Theile

$$\text{(22}^{a}.) \qquad \frac{dS\varrho}{d\varrho} \leqq \frac{S-\sqrt{S^2\sin^2\varphi-\varrho^2\cos^2\varphi}}{1-\sin\varphi},$$

dann ist dort nach Formel (19ᵃ.):

$$\text{(23}^{a}.) \qquad Z_z = \tfrac{1}{2}\gamma\,\frac{S(1+\sin^2\varphi)-2\sqrt{S^2\sin^2\varphi-\varrho^2\cos^2\varphi}}{\cos^2\varphi}.$$

Oder es ist

$$\text{(22}^{b}.) \qquad \frac{dS\varrho}{d\varrho} \geqq \frac{S-\sqrt{S^2\sin^2\varphi-\varrho^2\cos^2\varphi}}{1-\sin\varphi};$$

dann lässt sich nach Formel (20ᵇ.) ein in dem Intervall von 0 bi liegender Winkel ψ so bestimmen, dass mit passend gewähltem Vorzeic von $\sqrt{S^2\sin^2\psi-T\cos^2\psi}$

$$\text{(24}^{b}.) \qquad \frac{dS\varrho}{d\varrho} = \frac{S+\sqrt{S^2\sin^2\psi-\varrho^2\cos^2\psi}}{1+\sin\psi}\,\frac{1+\sin\varphi}{1-\sin\varphi}$$

wird. Mit diesem Winkel ψ erhält man dann

$$\text{(23}^{b}.) \qquad Z_z = \tfrac{1}{2}\gamma\,\frac{S(1+\sin^2\psi)+2\sqrt{S^2\sin^2\psi-\varrho^2\cos^2\psi}}{\cos^2\psi}.$$

Man kann aber auch Z_z direct durch S und $\frac{dS\varrho}{d\varrho}$ ausdrücken, o erst den Winkel ψ zu bestimmen. Setzen wir

$$\text{(25.)} \qquad \lambda = \frac{1-\sin\varphi}{1+\sin\varphi}$$

so ist

$$\text{(26}^{b}.) \qquad S-\lambda\frac{dS\varrho}{d\varrho} = \frac{S\sin\psi-\sqrt{S^2\sin^2\psi-\varrho^2\cos^2\psi}}{1+\sin\psi}$$

und

$$(27^b.)\qquad \frac{\varrho^2}{S-\lambda\frac{dS\varrho}{d\varrho}} = \frac{S\sin\psi+\sqrt{S^2\sin^2\psi-\varrho^2\cos^2\psi}}{1-\sin\psi}.$$

Aus (24.) und (27^b.) erhält man dann unmittelbar den durch (23^b.) gegebenen Werth Z_z vermöge der Formel

$$(28^b.)\qquad Z_z = \tfrac{1}{2}\gamma\left\{\lambda\frac{dS\varrho}{d\varrho}+\frac{\varrho^2}{S-\lambda\frac{dS\varrho}{d\varrho}}\right\}.$$

Es lässt sich also thatsächlich die ganze Druckvertheilung aus der durch (S,ϱ) dargestellten Curve erkennen. Deshalb soll diese Linie die Curve der Druckvertheilung genannt werden. Allerdings muss hervorgehoben werden, dass die Curve (S,ϱ) die in Frage stehende Eigenschaft nur dann besitzt, wenn die Sandmasse sich überall im Grenzzustande des Gleichgewichts befindet, wie es hier der Fall ist.

§ 10.

Die im vorhergehenden Abschnitte mit dem Zusatz *a* oder *b* bei der Ziffer versehenen Formeln gelten je nachdem ob

$$\frac{dS}{d\varrho} < \frac{S\sin\varphi-\sqrt{S^2\sin^2\varphi-\varrho^2\cos^2\varphi}}{\varrho(1-\sin\varphi)}$$

oder ob

$$\frac{dS}{d\varrho} > \frac{S\sin\varphi-\sqrt{S^2\sin^2\varphi-\varrho^2\cos^2\varphi}}{\varrho(1-\sin\varphi)}$$

ist. In dem Grenzfalle, welcher durch die Gleichung

$$(29.)\qquad \frac{dS}{d\varrho} = \frac{S\sin\varphi-\sqrt{S^2\sin^2\varphi-\varrho^2\cos^2\varphi}}{\varrho(1-\sin\varphi)}$$

charakterisirt ist, gelten beide Formeln. Das Verhalten der Druckvertheilung in der Entfernung ϱ von der Axe hängt also wesentlich davon ab, ob die Druckcurve an der entsprechenden Stelle schwächer oder stärker ansteigt, als die Curve mit der Differentialgleichung (29.), welche man durch diesen Punkt legen kann.

Um zunächst diese Differentialgleichung integriren zu können, führen wir einen Parameter w vermittelst der Gleichung

$$(30.)\qquad w = \frac{S\sin\varphi-\sqrt{S^2\sin^2\varphi-\varrho^2\cos^2\varphi}}{\varrho(1-\sin\varphi)}$$

ein. Da S positiv ist und für die Wurzel $\sqrt{S^2\sin^2\varphi-\varrho^2\cos^2\varphi}$ ebenfalls der positive Werth genommen werden sollte, so ist w positiv und nimmt mit wachsendem S/ϱ beständig ab. Für den kleinsten Werth von S/ϱ, für $\operatorname{cotg}\varphi$, wird

$$w = \frac{\cos\varphi}{1-\sin\varphi} = \sqrt{\frac{1+\sin\varphi}{1-\sin\varphi}} = \frac{1}{\sqrt{\lambda}}$$

und nähert sich, wenn S/ϱ unendlich gross wird, der Grenze Null. Zu jedem Werthe von S/ϱ gehört also nur ein Werth w zwischen Null und $\frac{1}{\sqrt{\lambda}}$. Aus (30.) folgt leicht

$$(31.)\quad \frac{1}{w} = \frac{(1-\sin\varphi)\varrho}{S\sin\varphi-\sqrt{S^2\sin^2\varphi-\varrho^2\cos^2\varphi}} = \frac{S\sin\varphi+\sqrt{S^2\sin^2\varphi-\varrho^2\cos^2\varphi}}{(1+\sin\varphi)\varrho}$$

und aus der Verbindung beider Gleichungen

$$(32.)\quad \frac{S}{\varrho} = \frac{1-\sin\varphi}{2\sin\varphi}w+\frac{1+\sin\varphi}{2\sin\varphi}\frac{1}{w} = \frac{1}{1-\lambda}\left(\lambda w+\frac{1}{w}\right),$$

$$(33.)\quad \frac{\sqrt{S^2\sin^2\varphi-\varrho^2\cos^2\varphi}}{\varrho} = \frac{1+\sin\varphi}{2w}-\frac{(1-\sin\varphi)}{2}w = \frac{1}{1+\lambda}\left(\frac{1}{w}-\lambda w\right).$$

Die Gleichung (29.) liefert uns nun den Zusammenhang zwischen ϱ und w

$$\frac{d}{d\varrho}\frac{\varrho}{1-\lambda}\left(\lambda w+\frac{1}{w}\right) = w$$

oder

$$(34.)\quad \frac{d\varrho}{\varrho} = \frac{(1-\lambda w^2)dw}{(1+(2\lambda-1)w^2)w}.$$

Diese Gleichung lässt sich unmittelbar integriren und ergiebt

$$(35.)\quad \varrho = A\frac{w}{[1+(2\lambda+1)w^2]^{\frac{3\lambda-1}{4\lambda-2}}}.$$

So lange $1+(2\lambda-1)w^2$ positiv ist, darf vorausgesetzt werden, dass die Potenz im Nenner reell und positiv ist; dann hat auch A einen reellen, positiven Werth. Wenn aber $1+(2\lambda-1)w^2$ negativ wird, was nur vorkommen kann, wenn $1+\frac{2\lambda-1}{\lambda}$ negativ oder $\lambda<\frac{1}{3}$ ist, so wird die Potenz im Nenner einen complexen Factor erhalten, und man wird, um reelle Werthe ϱ zu erhalten, der Grösse A ebenfalls einen complexen Werth

und w nimmt mit wachsenden ϱ zu, da

$$\frac{dS}{d\varrho} = w$$

positiv ist. Für $w = \frac{1}{\sqrt{\lambda}}$ wird

$$S = \varrho \operatorname{cotg} \varphi;$$

der Curvenzug endigt also auf der geraden Linie mit vorstehender Gleichung.

Wenn aber $1 + \frac{2\lambda - 1}{\lambda}$ negativ ist, so ist ϱ bei reellem A reell, wie $w < \frac{1}{\sqrt{1-2\lambda}}$ ist. In diesem Intervall ist $\frac{d\varrho}{dw}$ positiv; es wächst also ϱ mit wachsendem w vom Werthe Null bis es für $w = \frac{1}{\sqrt{1-2\lambda}}$ unendlich wird, weil $\frac{3\lambda - 1}{4\lambda - 2}$ für die fraglichen Werthe λ offenbar positiv ist. S hat auch hier für $\varrho = 0$ den Werth $\frac{A}{1-\lambda}$, es wächst mit wachsendem ϱ und für $w = \frac{1}{\sqrt{1-2\lambda}}$ wird

$$\frac{S}{\varrho} = \frac{1}{\sqrt{1-2\lambda}}.$$

Der Unterschied von S und $\frac{\varrho}{\sqrt{1-2\lambda}}$ wird, wenn w sich der Grenze $\frac{1}{\sqrt{1-2\lambda}}$ nähert, unendlich klein von der Ordnung $\frac{1-\lambda}{2-4\lambda}$ und $\frac{dS}{d\varrho}$ wird gleich $\frac{1}{\sqrt{1-2\lambda}}$ d. h. der Curvenzug nähert sich der geraden Linie

$$S = \frac{\varrho}{\sqrt{1-2\lambda}}$$

asymptotisch.

Wenn aber $w > \frac{1}{\sqrt{1-2\lambda}}$ wird, so nimmt ϱ mit wachsendem w ab oder umgekehrt ϱ wächst, während w abnimmt. Für $w = \frac{1}{\sqrt{\lambda}}$ wird $\frac{S}{\varrho} = \operatorname{cotg} \varphi$, d. h. der entsprechende Punkt liegt auf der geraden Linie

$$S = \varrho \operatorname{cotg} \varphi.$$

Von dort steigen ϱ und S gleichzeitig, bis die Curve für $w = \frac{1}{\sqrt{1-2\lambda}}$ sich

wieder der geraden Linie

$$S = \frac{\varrho}{\sqrt{1-2\lambda}}$$

asymptotisch nähert.

§ 11.

In Gebieten, in welchen

$$\frac{dS}{d\varrho} \leqq \frac{S\sin\varphi - \sqrt{S^2\sin^2\varphi - \varrho^2\cos^2\varphi}}{\varrho(1-\sin\varphi)}$$

ist, hatten wir

$$Z_z = \tfrac{1}{2}\gamma\frac{S(1+\sin^2\varphi) - 2\sqrt{S^2\sin^2\varphi - \varrho^2\cos^2\varphi}}{\cos^2\varphi}.$$

Wir wollen untersuchen, wie sich dieser Ausdruck bei einer Variation von S verhält. Differentiiren wir, so wird

$$\frac{dZ_z}{dS} = \tfrac{1}{2}\gamma\frac{1+\sin^2\varphi - \dfrac{2S\sin\varphi}{\sqrt{S^2\sin^2\varphi - \varrho^2\cos^2\varphi}}}{\cos^2\varphi}.$$

Dieser Ausdruck ist von dem kleinsten zulässigen Werth $S = \varrho\,\mathrm{cotg}\,\varphi$ bis zu seiner Nullstelle

$$(36.)\qquad S = \varrho\frac{1+\sin^2\varphi}{\sin\varphi\cos\varphi}$$

negativ und von da ab positiv. Der angegebene Werth liefert uns also das Minimum von Z_z, welches, beiläufig gesagt, gleich $\frac{1}{2}\gamma\varrho\,\mathrm{cotg}\,\varphi$ ist. So lange S kleiner als der unter (36.) angegebene Werth ist, wird also eine Vergrösserung von S eine Verminderung des Bodendruckes bewirken, und umgekehrt wird bei einem S, welches grösser als $\varrho\frac{1+\sin^2\varphi}{\sin\varphi\cos\varphi}$ ist eine Verkleinerung von S mit einer Verminderung des Bodendruckes verbunden sein.

Für das Verhältniss S/ϱ gilt nun aber in den Gebieten, von welchen wir jetzt sprechen, die Gleichung

$$\frac{d}{d\varrho}\left(\varrho\frac{S}{\varrho}\right) \leqq \frac{S\sin\varphi - \sqrt{S^2\sin^2\varphi - \varrho^2\cos^2\varphi}}{(1-\sin\varphi)\varrho} = w$$

oder

$$\varrho \frac{d}{d\varrho}\left(\frac{S}{\varrho}\right) \leqq w - \frac{S}{\varrho} = w - \frac{1}{(1-\lambda)}\left(\lambda w + \frac{1}{w}\right).$$

$$(37.) \qquad \varrho \frac{d}{d\varrho}\left(\frac{S}{\varrho}\right) \leqq -\frac{1+(2\lambda-1)w^2}{w(1-\lambda)}.$$

Wenn $\lambda > \frac{1}{3}$ ist, so hat der rechts stehende Ausdruck für jeden in Betracht kommenden Werth w einen negativen Werth, d. h. S/ϱ nimmt mit wachsendem ϱ beständig ab. Ist dagegen $\lambda < \frac{1}{3}$, so ist die rechte Seite der fraglichen Beziehung nur so lange negativ, als $w < \frac{1}{\sqrt{1-2\lambda}}$ oder

$$\frac{S}{\varrho} > \frac{1}{\sqrt{1-2\lambda}} = \sqrt{\frac{1+\sin\varphi}{3\sin\varphi - 1}}$$

ist. Wenn aber $w > \frac{1}{\sqrt{1-2\lambda}}$ ist, oder S/ϱ kleiner als $\sqrt{\frac{1+\sin\varphi}{3\sin\varphi-1}}$ geworden ist, so ist die rechte Seite von (37.) positiv und dann kann möglicher Weise $\frac{d}{d\varrho}\left(\frac{S}{\varrho}\right)$ auch positiv werden, d. h. S/ϱ kann auch wieder wachsen, aber offenbar nicht mehr über den Werth $\sqrt{\frac{1+\sin\varphi}{3\sin\varphi-1}}$ hinaus.

Nun ist aber

$$\begin{aligned} &(1+\sin^2\varphi)^2(3\sin\varphi-1) - \sin^2\varphi\cos^2\varphi(1+\sin\varphi) \\ &= 4\sin^5\varphi + 5\sin^3\varphi - 3\sin^2\varphi + 3\sin\varphi - 1 \\ &= \sin^2\varphi(4\sin^3\varphi + 5\sin\varphi - 3) + 3\sin\varphi - 1. \end{aligned}$$

Der erste Bestandtheil ist für $\sin\varphi = \frac{1}{2}$ gleich Null und nimmt mit wachsendem $\sin\varphi$ offenbar zu; $3\sin\varphi - 1$ hat für $\sin\varphi = \frac{1}{2}$ den Werth $\frac{1}{2}$ und wächst ebenfalls gleichzeitig mit $\sin\varphi$. Deshalb ist der ganze Ausdruck sicher positiv, sobald nur $\sin\varphi \geqq \frac{1}{2}$ oder, was dasselbe besagt, $\lambda \leqq \frac{1}{3}$ ist. Demnach ist für die in Betracht kommenden Werthe von $\sin\varphi$:

$$\frac{1+\sin^2\varphi}{\sin\varphi\cos\varphi} > \sqrt{\frac{1+\sin\varphi}{3\sin\varphi-1}};$$

und also gehört der links stehende Ausdruck zu denjenigen, für welche $\frac{d}{d\varrho}\left(\frac{S}{\varrho}\right)$ sicher negativ ist und welche also selbst in Gebieten von der hier in Frage stehenden Art sicher nur einmal erreicht werden.

Nach diesen Auseinandersetzungen übersieht man sofort, dass Theile der Druckcurve, in welchen

$$\frac{dS}{d\varrho} \leqq \frac{S\sin\varphi - \sqrt{S^2\sin^2\varphi - \varrho^2\cos^2\varphi}}{\varrho(1-\sin\varphi)}$$

ist, von dreierlei Art sein können. Entweder es ist in dem zu dem grösseren ϱ gehörenden Endpunkte

$$\frac{S}{\varrho} \geqq \frac{1+\sin^2\varphi}{\sin\varphi\cos\varphi};$$

dann hat der ganze Theil der Druckcurve dieselbe Eigenschaft. Oder es ist in dem zum kleineren ϱ gehörenden Endpunkte

$$\frac{S}{\varrho} \leqq \frac{1+\sin^2\varphi}{\sin\varphi\cos\varphi};$$

dann gilt ebenfalls diese Beziehung in dem ganzen Gebiet. Die dritte Möglichkeit ist die, dass in dem Endpunkte mit grösserem ϱ der Werth von S/ϱ kleiner, in dem anderen Endpunkte grösser als $\frac{1+\sin^2\varphi}{\sin\varphi\cos\varphi}$ wird. Dann giebt es zwischen beiden sicher einen und nur einen Punkt, für welchen

$$\frac{S}{\varrho} = \frac{1+\sin^2\varphi}{\sin\varphi\cos\varphi}.$$

Dieser Punkt zerlegt dann den fraglichen Theil der Druckcurve in zwei Gebiete, von welchen das eine der ersterwähnten Gruppe, das andere der zweiten Gruppe angehört.

Nun wollen wir die beiden Gruppen von Gebieten, in welchen

$$\frac{dS}{d\varrho} < \frac{S\sin\varphi - \sqrt{S^2\sin^2\varphi - \varrho^2\cos^2\varphi}}{\varrho(1-\sin\varphi)}$$

ist, unter Verminderung des Bodendrucks beseitigen. Wir betrachten zunächst ein Gebiet, in welchem

$$\frac{S}{\varrho} \leqq \frac{1+\sin^2\varphi}{\sin\varphi\cos\varphi}$$

ist. Durch die Punkte eines solchen Theils der Druckcurve denken wir uns nach der Seite der grösseren ϱ die Stücke von Hauptcurven gezogen. Da diese der Differentialgleichung

$$\frac{dS}{d\varrho} = \frac{S\sin\varphi - \sqrt{S^2\sin^2\varphi - \varrho^2\cos^2\varphi}}{\varrho(1-\sin\varphi)}$$

genügen, so steigen dieselben in ihren Ausgangspunkten stärker an, als es dort die ursprüngliche Druckcurve thut, und da ferner zwei Hauptcurven sich nicht schneiden, so liegt ein solcher Curvenzug um so höher, je näher sein Ausgangspunkt der Linie $\varrho = 0$ liegt. Deshalb muss diejenige Hauptcurve, welche durch das der Axe $\varrho = 0$ am nächsten gelegene Ende des fraglichen Theils der Druckcurve geführt ist, ganz und gar oberhalb dieses Theiles liegen. Nun ist zweierlei möglich. Wenn $\lambda < \frac{1}{3}$ ist, so reicht ein solcher Curvenzug ins Unendliche und also auch bis $\varrho = r$. Wenn dagegen $\lambda > \frac{1}{3}$ ist, so reichen die Hauptcurven nur bis zu einem im Endlichen gelegenen Punkte der geraden Linie

$$S = \varrho \operatorname{cotg} \varphi,$$

und es kann also vorkommen, dass eine Hauptcurve ihr Ende eher wie die Linie $\varrho = r$ erreicht. Da aber $\varrho \operatorname{cotg} \varphi$ der kleinste Werth ist, welchen das S für irgend einen Werth ϱ haben kann, so liegt der fragliche Endpunkt auf oder unterhalb der ursprünglichen Druckcurve. Wenn also der Zug der Hauptcurve vor dem Rande sein Ende erreicht, so muss er die Druckcurve ausser in dem Ausgangspunkt noch in mindestens einem Punkte schneiden. Sind ausser dem Anfangspunkt noch Schnittpunkte mit der Druckcurve vorhanden, so soll derjenige Schnittpunkt, welcher dem Anfang am nächsten liegt, als das Ende angesehen werden. Im anderen Falle nehmen wir den Schnittpunkt mit der Linie $\varrho = r$ als Endpunkt der Hauptcurve.

Wir variiren nun die ursprüngliche Druckvertheilung, indem wir zwischen Anfangspunkt und Endpunkt die gegebene Druckcurve durch die Hauptcurve ersetzen. Die Werthe, welche die Druckcomponenten nach der Variation erhalten, sollen durch beigefügte Accente ausgezeichnet werden; dann ist

$$Z'_z = \frac{1}{2}\gamma \frac{S'(1+\sin^2\varphi) - 2\sqrt{S'^2\sin^2\varphi - \varrho^2\cos^2\varphi}}{\cos^2\varphi}.$$

Nun ist aber, da im Ausgangspunkt $S' \leqq \varrho \frac{1+\sin^2\varphi}{\sin\varphi\cos\varphi}$ ist, diese Bedingung für das ganze Stück erfüllt, und

$$S < S' < \frac{1+\sin^2\varphi}{\sin\varphi\cos\varphi}.$$

ist. Man hat hier nur nur nöthig, durch den Endpunkt mit dem grösseren ϱ eine Hauptcurve zu legen. Dieselbe verläuft hier unterhalb des fraglichen Gebietes. Es ist leicht einzusehen, dass die Hauptcurve sicher die Axe $\varrho = 0$ schneidet. In dem Falle $\lambda \geqq \frac{1}{3}$, wo wir nur eine Art von Hauptcurven haben, versteht sich das von selbst. In dem anderen Falle, dass $\lambda < \frac{1}{3}$ ist, folgt es daraus, dass der Ausgangspunkt die Bedingung

$$\frac{S}{\varrho} \geqq \frac{1+\sin^2\varphi}{\sin\varphi\cos\varphi} > \frac{1}{\sqrt{1-2\lambda}}$$

erfüllt und also oberhalb der geraden Linie liegt, welche die beiden Gruppen von Hauptcurven trennt. Schneidet die Hauptcurve die gegebene Druckcurve nicht, so soll der Schnittpunkt mit der Linie $\varrho = 0$ als Endpunkt angesehen werden; im anderen Falle soll derjenige Schnittpunkt, welcher dem Ausgangspunkt am nächsten liegt, als Endpunkt betrachtet werden.

Jetzt soll die ursprüngliche Druckvertheilung dadurch abgeändert werden, dass das zwischen Anfang und Ende der Hauptcurve gelegene Stück der Druckcurve durch das entsprechende Stück der Hauptcurve ersetzt wird. Geben wir den variirten Grössen auch wieder einen Accent als Kennzeichen, so ist jetzt

$$S > S' > \frac{1+\sin^2\varphi}{\sin\varphi\cos\varphi}$$

und folglich

$$\tfrac{1}{2}\gamma\,\frac{S'(1+\sin^2\varphi)-2\sqrt{S'^2\sin^2\varphi-\varrho^2\cos^2\varphi}}{\cos^2\varphi} < \tfrac{1}{2}\gamma\,\frac{S(1+\sin^2\varphi)-2\sqrt{S^2\sin^2\varphi-\varrho^2\cos^2\varphi}}{\cos^2\varphi}.$$

Der links stehende Ausdruck ist wieder Z_z', der rechts stehende Ausdruck ist entweder selbst gleich Z_z oder kleiner als diese Grösse, sodass auch hier wieder die Beziehung

$$Z_z' < Z_z$$

gilt. Also ist die vorgenommene Variation mit einer Verminderung des Bodendrucks verknüpft.

§ 12.

Nachdem wir in dieser Weise unter Verminderung des Bodendrucks die Gebiete, in welchen Φ der mittlere Hauptdruck ist, beseitigt haben, ist eine Druckvertheilung übrig geblieben, wo Φ nirgend kleiner als der grössere der beiden anderen Hauptdrucke ist. Wir wollen im Folgenden

doch angenommen werden, dass die durch einen Punkt der Drucklinie gelegte Hauptcurve die Axe $\varrho = 0$ erreicht.

Wir wollen nun die Druckvertheilung dadurch abändern, dass wir von $\varrho = 0$ bis $\varrho = \varrho_1$ an Stelle von S den Werth S' setzen, welcher der durch ϱ_1, S_1 gelegten Hauptcurve entspricht. Dann ist die Function S' von ϱ und ϱ_1 bestimmt durch die Gleichung

$$\frac{\partial S'}{\partial \varrho} = \frac{S' \sin\varphi - \sqrt{S'^2 \sin^2\varphi - \varrho^2 \cos^2\varphi}}{\varrho(1-\sin\varphi)}$$

mit der Nebenbedingung $S' = S_1$ für $\varrho = \varrho_1$. An Stelle von Z_z ist zu setzen der Werth

$$Z_z' = \tfrac{1}{2}\gamma \left\{ \lambda \frac{\partial S'\varrho}{\partial \varrho} + \frac{\varrho^2}{S' - \lambda \frac{\partial S'\varrho}{\partial \varrho}} \right\}.$$

Der Bodendruck ist bei dieser neuen Druckvertheilung

$$P' = 2\pi \int_{\varrho_1}^{r} Z_z \varrho \, d\varrho + 2\pi \int_{0}^{\varrho_1} Z_z' \varrho \, d\varrho.$$

Differentiiren wir diesen Ausdruck nach ϱ_1, so ergiebt sich

$$\frac{dP'}{d\varrho_1} = + 2\pi \, (Z_z' - Z_z)_{\varrho = \varrho_1} \varrho_1 + 2\pi \int_{0}^{\varrho_1} \frac{\partial Z_z'}{\partial \varrho_1} \varrho \, d\varrho.$$

Nun ist aber

$$\frac{\partial Z_z}{\partial \varrho_1} = \tfrac{1}{2}\gamma\lambda \left\{ 1 + \frac{\varrho^2}{\left(S' - \lambda \frac{\partial \varrho S'}{\partial \varrho}\right)^2} \right\} \frac{\partial}{\partial \varrho}\left(\varrho \frac{\partial S'}{\partial \varrho_1}\right) - \frac{\gamma}{2} \frac{\varrho^2}{\left(S' - \lambda \frac{\partial}{\partial \varrho}(\varrho S')\right)^2} \frac{\partial S'}{\partial \varrho_1}$$

und der Ausdruck

$$Z_z' - Z_z = \tfrac{1}{2}\gamma \left\{ \lambda \left[\left(\frac{\partial}{\partial \varrho}(\varrho S') - \frac{d}{d\varrho}(\varrho S)\right] \left[1 + \frac{\varrho^2}{\left(S' - \lambda \frac{\partial \varrho S'}{\partial \varrho}\right)\left(S - \lambda \frac{d\varrho S}{d\varrho}\right)} \right] \right.$$
$$\left. - \frac{\varrho^2 (S' - S)}{\left(S' - \lambda \frac{\partial \varrho S'}{\partial \varrho}\right)\left(S - \lambda \frac{d\varrho S}{d\varrho}\right)} \right\},$$

vereinfacht sich für $\varrho = \varrho_1$, da dort $S' = S$ ist, zu

$$(Z_z' - Z_z)_{\varrho = \varrho_1} = \tfrac{1}{2}\gamma\lambda \left\{ 1 + \frac{\varrho^2}{\left(S' - \lambda \frac{\partial \varrho S'}{\partial \varrho}\right)\left(S - \lambda \frac{d\varrho S}{d\varrho}\right)} \right\}_{\varrho = \varrho_1} \left(\frac{\partial S'}{\partial \varrho} - \frac{dS}{d\varrho}\right)_{\varrho = \varrho_1} \varrho_1.$$

$$\frac{d\varrho}{\varrho} = \frac{(1-\lambda w')^2 dw'}{(1+(2\lambda-1)w'^2)w'};$$

$$\varrho = A' \frac{w'}{(1+(2\lambda-1)w'^2)^{\frac{3\lambda-1}{4\lambda-2}}}.$$

Die Constante A' ist durch den Werth

$$w_1 = \frac{S_1 \sin\varphi - \sqrt{S_1^2 \sin^2\varphi - \varrho_1^2 \cos^2\varphi}}{\varrho_1(1-\sin\varphi)}$$

bestimmt, welchen w' für $\varrho = \varrho_1$ annimmt; insofern nun w' offenbar eine Function von ϱ/A' ist, hängt diese Grösse auch von ϱ_1 ab. In S' kommen aber ausser der Constanten λ nur die beiden Grössen ϱ und w' vor, und also ist

$$\frac{\partial S'}{\partial \varrho_1} = \frac{\partial S'}{\partial w'} \frac{\partial w'}{\partial A'} \frac{\partial A'}{\partial \varrho_1}$$

oder, weil

$$\frac{\partial w'}{\partial A'} = -\frac{\partial w'}{\partial \varrho} \frac{\varrho}{A'}$$

ist,

$$\frac{\partial S'}{\partial \varrho_1} = -\frac{\partial S'}{\partial w'} \frac{\partial w'}{\partial \varrho} \frac{\varrho}{A'} \frac{\partial A'}{\partial \varrho_1}.$$

Nun ist aber offenbar

$$\frac{\partial S'}{\partial \varrho} = \frac{S'}{\varrho} + \frac{\partial S'}{\partial w'} \frac{\partial w'}{\partial \varrho}$$

und folglich

$$\frac{\partial S'}{\partial \varrho_1} = -\left(\frac{\partial S'}{\partial \varrho} - \frac{S'}{\varrho}\right) \varrho \frac{1}{A'} \frac{\partial A'}{\partial \varrho_1} = \varrho \frac{(1+(2\lambda-1)w'^2)}{(1-\lambda)w'A'} \frac{\partial A'}{\partial \varrho_1}.$$

Nähert sich jetzt ϱ der Grenze Null, so nähert sich der Quotient $\frac{\varrho}{wA'}$ der Grenze 1 und wir erhalten

$$\left(\frac{\partial S'}{\partial \varrho_1}\right)_{\varrho=0} = \frac{1}{1-\lambda} \frac{\partial A'}{\partial \varrho_1}.$$

Der Ausdruck

$$\frac{\varrho}{S' - \lambda \frac{\partial \varrho S'}{\partial \varrho}} = w'$$

hat für $w = 0$ selbst den Werth Null. Daraus folgt dann unmittelbar, dass das in Frage stehende Product

$$\left\{1 + \frac{\varrho^2}{\left(S' - \lambda \frac{\partial \varrho S'}{\partial \varrho}\right)^2}\right\} \varrho^2 \frac{\partial S'}{\partial \varrho_1}$$

für $\varrho = 0$ thatsächlich verschwindet.

Demnach kann die Formel für $\frac{\partial P'}{\partial \varrho_1}$ folgendermassen umgestaltet werden:

$$\frac{\partial P'}{\partial \varrho_1} = -\pi\gamma\varrho_1^2\lambda \left\{1 + \frac{\varrho^2}{\left(S' - \lambda \frac{\partial \varrho S'}{\partial \varrho}\right)\left(S - \lambda \frac{d\varrho S}{d\varrho}\right)}\right\}_{\varrho=\varrho_1} \left(\frac{\partial S'}{\partial \varrho_1}\right)_{\varrho=\varrho_1}$$

$$+ \pi\gamma\varrho_1^2\lambda \left\{1 + \frac{\varrho^2}{\left(S' - \lambda \frac{\partial \varrho S'}{\partial \varrho}\right)^2}\right\}_{\varrho=\varrho_1} \left(\frac{\partial S'}{\partial \varrho_1}\right)_{\varrho=\varrho_1}$$

$$- \pi\gamma \int_0^{\varrho_1} \left(w'^2 + \lambda \frac{\partial}{\partial \varrho}\, \varrho\,(1 + w'^2)\right) \frac{\partial S'}{\partial \varrho_1}\, \varrho\, d\varrho$$

$$= -\pi\lambda\varrho_1^2\lambda \left\{\frac{\varrho_1^3}{\left(S' - \lambda \frac{\partial \varrho S'}{\partial \varrho}\right)^2 \left(S - \lambda \frac{d\varrho S}{d\varrho}\right)} \left(\frac{\partial S'}{\partial \varrho_1}\right)^2\right\}_{\varrho=\varrho_1}$$

$$- \pi\gamma \int_0^{\varrho_1} \left[w'^2 + \lambda \frac{\partial}{\partial \varrho}\, \varrho\,(1 + w'^2)\right] \frac{\partial S'}{\partial \varrho_1}\, \varrho\, d\varrho.$$

Von den Bestandtheilen bietet zu Zweifeln bezüglich seines Vorzeichens nur der im Nenner stehende Ausdruck

$$S - \lambda \frac{d\varrho S}{d\varrho} = S(1 - \lambda) - \lambda \frac{dS}{d\varrho} \varrho$$

Anlass. Da aber

$$\frac{dS}{d\varrho} < \frac{S \sin\varphi + \sqrt{S^2 \sin^2\varphi - \varrho^2 \cos^2\varphi}}{\varrho(1 - \sin\varphi)}$$

ist, so ist er grösser als der Ausdruck

$$\varrho\, \frac{S \sin\varphi - \sqrt{S^2 \sin^2\varphi - \varrho^2 \cos^2\varphi}}{\varrho(1 + \sin\varphi)}$$

und folglich positiv. Das Glied ausserhalb des Integrals hat also einen negativen Werth, wenn nicht $\left(\frac{\partial S'}{\partial \varrho_1}\right)_{\varrho=\varrho_1} = 0$ ist.

Der Factor

$$w'^2 + \lambda \frac{\partial}{\partial \varrho}(1 + w'^2)\varrho$$

ist deshalb sicher positiv, weil w' positiv ist und mit wachsendem ϱ zunimmt. Die Grösse $\frac{\partial S'}{\partial \varrho_1}$ hat, da zwei Hauptcurven sich nicht schneiden, in dem ganzen Verlauf von $\varrho = 0$ bis $\varrho = \varrho_1$ dasselbe Zeichen. Gehört der Punkt ϱ_1, S_1 zu einem Stück der Druckcurve, welches mit einer Hauptcurve übereinstimmt, so ist

$$\left(\frac{dS}{d\varrho}\right)_{\varrho=\varrho_1} = \frac{S_1 \sin\varphi - \sqrt{S_1^2 \sin^2\varphi - S_1^2 \cos^2\varphi}}{\varrho_1(1 - \sin\varphi)} = \left(\frac{\partial S'}{\partial \varrho}\right)_{\varrho=\varrho_1}$$

und

$$\left(\frac{\partial S'}{\partial \varrho_1}\right)_{\varrho=\varrho_1} = \left(\frac{dS}{d\varrho}\right)_{\varrho=\varrho_1} - \left(\frac{\partial S'}{\partial \varrho}\right)_{\varrho=\varrho_1} = 0,$$

d. h. die Hauptcurve ändert sich bei der Verschiebung des Punktes ϱ_1, S_1 auf der Curve der Druckvertheilung nicht und $\frac{\partial P'}{\partial \varrho_1}$ hat also dann den Werth Null.

Wenn aber das Gebiet, in welchem sich ϱ_1 S_1 bewegt, nicht einer Hauptcurve angehört, so ist

$$\left(\frac{dS}{d\varrho}\right)_{\varrho=\varrho_1} > \frac{S_1 \sin\varphi - \sqrt{S_1^2 \sin^2\varphi - \varrho_1^2 \cos^2\varphi}}{\varrho_1(1 - \sin\varphi)} = \left(\frac{\partial S'}{\partial \varrho}\right)_{\varrho=\varrho_1}$$

und folglich

$$\left(\frac{\partial S'}{\partial \varrho_1}\right)_{\varrho=\varrho_1} = \left(\frac{dS}{d\varrho}\right)_{\varrho=\varrho_1} - \left(\frac{\partial S'}{\partial \varrho}\right)_{\varrho=\varrho_1} > 0.$$

In diesem Falle wird das Glied mit dem Integral ebenso wie das erste Glied negativ und dann erhält natürlich auch $\frac{\partial P'}{\partial \varrho_1}$ einen negativen Werth.

Besteht nun die ursprüngliche Curve der Druckvertheilung nicht aus einer Hauptcurve, sondern enthält sie auch Strecken, welche nicht einer Hauptcurve angehören, so ist die Ableitung von P' nach ϱ_1 mindestens streckenweise negativ und niemals positiv. P' hat also sicher abgenommen, während ϱ_1 von 0 bis r gewachsen ist und damit zugleich die ursprüngliche Druckvertheilung in eine solche umgewandelt ist, deren Druckcure mit einer Hauptcurve zusammenfällt.

Da wir demnach den Bodendruck verkleinern, indem wir die ursprüngliche Druckvertheilung durch eine solche ersetzen, welche einer einzigen passend gewählten Hauptcurve entspricht, so haben wir nur noch zu bestimmen, welcher Hauptcurve ein Minimum des Bodendrucks zukommt, um den kleinsten Bodendruck, welcher überhaupt möglich ist, zu erhalten.

§ 13.

Wir haben also jetzt Druckvertheilungen zu betrachten, deren Curven Hauptcurven sind. Auf die Druckcurven sind folglich die Entwickelungen des § 9 unmittelbar anzuwenden. In dem ganzen Gebiet von 0 bis r gilt die Formel

$$\frac{dS}{d\varrho} = \frac{S\sin\varphi - \sqrt{S^2\sin^2\varphi - \varrho^2\cos^2\varphi}}{\varrho(1-\sin\varphi)} \tag{29.}$$

mit der Massgabe, dass S stetig ist und der Wurzel ein positiver Werth beizulegen ist. Mit der durch (30.) definirten Grösse

$$w = \frac{S\sin\varphi - \sqrt{S^2\sin^2\varphi - \varrho^2\cos^2\varphi}}{\varrho(1-\sin\varphi)},$$

welche offenbar unterhalb des positiven Werthes

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = \sqrt{\frac{1+\sin\varphi}{1-\sin\varphi}}$$

liegt, erhält man

$$\frac{dS}{d\varrho} = w,\quad S = \frac{\varrho}{1-\lambda}\left(\lambda w + \frac{1}{w}\right)$$

und die Formel

$$\frac{d\varrho}{\varrho} = \frac{(1-\lambda w^2)dw}{(1+(2\lambda-1)w^2)w}, \tag{34.}$$

sowie deren Integral

$$\varrho = A\,\frac{w}{(1+(2\lambda-1)w^2)^{\frac{3\lambda-1}{4\lambda-2}}}. \tag{35.}$$

Die vier Druckcomponenten, welche von Null verschieden sind, werden:

$$R = \tfrac{1}{2}\gamma S = \tfrac{1}{2}\,\frac{\gamma\varrho}{1-\lambda}\left(\lambda w + \frac{1}{w}\right),$$

$$T = \tfrac{1}{2}\gamma\varrho,$$

$$Z_z = \tfrac{1}{2}\,\frac{\gamma\varrho}{1-\lambda}\left(w + \frac{\lambda}{w}\right),$$

$$\Phi = \tfrac{1}{2}\gamma\,\frac{dS\varrho}{d\varrho} = \tfrac{1}{2}\,\frac{\gamma\varrho}{1-\lambda}\left(w + \frac{1}{w}\right).$$

§ 14.

Bis auf die Constante A ist durch die vorstehenden Formeln die Druckvertheilung bestimmt; die in Frage stehende Grösse ist nun so zu wählen, dass

$$P = 2\pi \int_0^r Z_z \varrho \, d\varrho$$

ein Minimum wird. Dabei ist allerdings zu bedenken, dass die Druckvertheilung noch einer Beschränkung unterworfen ist, nämlich der, dass am Rande des Gefässes

$$\left(\frac{R}{T}\right)_{\varrho=r} \geqq \operatorname{cotang}\varphi' \geqq \operatorname{cotang}\varphi$$

sein muss. Nennen wir nun w_1 den Werth, welchen w für $\varrho = r$ annimmt, so geht diese Bedingung in die folgende über:

$$\frac{1}{1-\lambda}\left(\lambda w_1 + \frac{1}{w_1}\right) \geqq \operatorname{cotg}\varphi',$$

oder

$$\lambda w_1^2 + 1 \geqq (1-\lambda) w_1 \operatorname{cotg}\varphi' = 2\sqrt{\lambda}\, w_1 \operatorname{cotg}\varphi' \operatorname{tang}\varphi.$$

Bringen wir alles nach links hinüber, so erhalten wir

$$(\sqrt{\lambda}\, w_1)^2 - 2(\sqrt{\lambda}\, w_1)\operatorname{cotg}\varphi_1 \operatorname{tang}\varphi + 1 \geqq 0$$

oder

$$\{\operatorname{tang}\varphi \operatorname{cotg}\varphi' - \sqrt{\lambda}\, w_1\}^2 \geqq \operatorname{tang}^2\varphi \operatorname{cotg}^2\varphi' - 1.$$

Da nun $\operatorname{tang}\varphi \operatorname{cotg}\varphi' > 1$ und $\sqrt{\lambda}\, w_1 < 1$ ist, so folgt hieraus

$$\operatorname{tang}\varphi \operatorname{cotg}\varphi' - \sqrt{\lambda}\, w_1 \geqq \sqrt{\operatorname{tang}^2\varphi \operatorname{cotg}^2\varphi' - 1}$$

oder

$$\sqrt{\lambda}\, w_1 \leqq \operatorname{tang}\varphi \operatorname{cotg}\varphi' - \sqrt{\operatorname{tang}^2\varphi \operatorname{cotg}^2\varphi' - 1}.$$

Die rechte Seite kann offenbar geschrieben werden:

$$\frac{\sqrt{\operatorname{tang}\varphi \operatorname{cotg}\varphi' + 1} - \sqrt{\operatorname{tang}\varphi \operatorname{cotg}\varphi' - 1}}{\sqrt{\operatorname{tang}\varphi \operatorname{cotg}\varphi' + 1} + \sqrt{\operatorname{tang}\varphi \operatorname{cotg}\varphi' - 1}}$$

$$= \frac{\sqrt{\sin(\varphi+\varphi')} - \sqrt{\sin(\varphi-\varphi')}}{\sqrt{\sin(\varphi+\varphi')} + \sqrt{\sin(\varphi-\varphi')}}.$$

Die Grenzbedingung drückt sich also in der Weise aus, dass der zu $\varrho = r$ gehörende Werth von w

$$w_1 \leqq \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \frac{\sqrt{\sin(\varphi+\varphi')} - \sqrt{\sin(\varphi-\varphi')}}{\sqrt{\sin(\varphi+\varphi')} + \sqrt{\sin(\varphi-\varphi')}}$$

ist. Der Kürze halber wollen wir den rechts stehenden Ausdruck w' nennen.

Durch w_1 ist A vermittelst der Gleichung

$$r = A\frac{w_1}{[1+(2\lambda-1)w_1^2]^{\frac{3\lambda-1}{4\lambda-2}}}$$

bestimmt. Wegen der Form der Grenzbedingung ist es offenbar empfehlenswerther, die Grösse des Bodendruckes nicht als Function von A sondern direct als Function von w_1 zu betrachten. Setzen wir in P für Z_2 seinen Werth ein, so erhalten wir

$$P = \frac{\pi\gamma}{(1-\lambda)}\int_0^r \varrho^2\left(w+\frac{\lambda}{w}\right)d\varrho.$$

Dieser Ausdruck hängt von w_1 ab, insofern w durch A bedingt ist; wir erhalten also

$$\frac{dP}{dw_1} = \frac{\pi\gamma}{(1-\lambda)}\int_0^r \frac{\varrho^2}{w^2}(w^2-\lambda)\frac{\partial w}{\partial w_1}d\varrho.$$

Genauer gesprochen ist aber w eine Function von $\frac{\varrho}{A}$ und also

$$\frac{\partial w}{\partial w_1} = \frac{\partial w}{\partial A}\frac{dA}{dw_1} = -\frac{dw}{d\varrho}\frac{\varrho}{A}\frac{dA}{dw_1}.$$

Demnach wird

$$\frac{dP}{dw_1} = -\frac{\pi\gamma}{(1-\lambda)A}\frac{dA}{dw_1}\int_0^r \frac{\varrho^3}{w^2}(w^2-\lambda)\frac{dw}{d\varrho}d\varrho$$

$$= -\frac{\pi\gamma}{(1-\lambda)}A^2\frac{dA}{dw_1}\int_0^{w_1}\frac{w(w^2-\lambda)}{[1+(2\lambda-1)w^2]^{\frac{9\lambda-3}{4\lambda-2}}}dw.$$

Betrachtet man $\frac{r}{A}$ als Function von w_1, so erkennt man leicht, dass diese Grösse mit wachsendem w_1 zunimmt. Deshalb muss A bei festgehaltenem r um so kleiner werden, je grösser w_1 ist, d. h. $\frac{dA}{dw_1}$ ist negativ. Also hat $\frac{dP}{dw_1}$ dasselbe Vorzeichen wie

$$\varphi(w_1) = \int_0^{w_1}\frac{w(w^2-\lambda)}{[1+(2\lambda-1)w^2]^{\frac{9\lambda-3}{4\lambda-2}}}dw.$$

Man übersieht sofort, dass die Function für $w_1 = 0$ selbst den Werth Null hat, und dass ihre Ableitung so lange negativ ist, wie $w^2 < \lambda$ bleibt, um dann für $w^2 > \lambda$ positiv zu werden. Die Function $\varphi(w_1)$ nimmt also zunächst, während w_1 von Null bis zum Werthe $\sqrt{\lambda}$ wächst, vom Werthe Null

aus bis zu einem gewissen negativen Werthe ab, um von da aus wieder zu steigen, so dass es eventuell auch positive Werthe annehmen kann.

Ist nun $\varphi(w')$ noch negativ, so nimmt P offenbar beständig ab, während w_1 von seinem kleinsten zulässigen Werthe 0 bis zu dem grössten in Betracht kommenden Werthe w' wächst. In diesem Falle erhalten wir also das Minimum des Bodendruckes, wenn wir für w_1 den Werth w' annehmen. Wenn dagegen $\varphi(w')$ positiv ist, so giebt es zwischen 0 und w' einen Werth w'', für welchen $\varphi(w'')$ verschwindet. Hier nimmt P nur so lange ab, bis w_1 den Werth w'' erreicht, und steigt mit wachsendem w_1, bis w_1 seinen grössten zulässigen Werth w' erreicht. Das Minimum des Bodendruckes tritt also hier bei $w_1 = w''$ ein.

Die Integration liefert für $\varphi(w_1)$ folgenden Ausdrucke

$$\varphi(w_1) = \frac{1}{1-2\lambda}\left\{\frac{1-\lambda+2\lambda^2}{1-5\lambda}[1+(2\lambda-1)w_1^2]^{-\frac{1-5\lambda}{2-4\lambda}} + \frac{1}{1+\lambda}[1+(2\lambda-1)w_1^2]^{\frac{1+\lambda}{2-4\lambda}} - \frac{(1-\lambda)(2+\lambda)(1-2\lambda)}{(1+\lambda)(1-5\lambda)}\right\},$$

mit den Grenzfällen

$$-\frac{11}{9}\,\text{lognat.}\,(1-\tfrac{3}{5}w_1^2)-\tfrac{3}{5}w_1^2 \qquad \text{für } \lambda = \tfrac{1}{5}$$

und

$$\tfrac{5}{9}-e^{-\frac{3}{4}w^2}(\tfrac{2}{3}w_1^2+\tfrac{5}{9}) \qquad \text{für } \lambda = \tfrac{1}{2}.$$

Die Gleichung $\varphi(w'') = 0$ kann dann offenbar als trinomische Gleichung für den Ausdruck $(1+(2\lambda-1)w''^2)$ angesehen und nach dem bekannten Verfahren von *Gauss* leicht aufgelöst werden. Begnügt man sich mit einem geringeren Grade der Genauigkeit, so kann man für w''^2 den Ausdruck

$$\lambda\left(\frac{3-\lambda}{1-\lambda^2}-1\right)$$

setzen, wie die nachstehende kleine Tabelle zeigt:

λ	$\lambda(\frac{3-\lambda}{1-\lambda^2}-1)$	w''^2
0.00	2λ	2λ
0.10	0.19293	0.19293
0.20	0.38333	0.38332
0.30	0.59010	0.59011
0.40	0.83809	0.83830
0.50	1.16667	1.16854
0.60	1.65000	1.65861.

zu setzen. Das ist aber überhaupt nur für $\lambda \leqq 0.6008$ möglich; für solche Werthe kann dann w'' mit ziemlicher Genauigkeit durch den Ausdruck

$$\left\{\lambda\left(\frac{3-\lambda}{1-\lambda^2}-1\right)\right\}^{\frac{1}{2}}$$

ersetzt werden.

§ 15.

Wenden wir uns zum Schlusse noch einmal dem allgemeinen Falle eines beliebigen Querschnittes zu, so werden wir unmittelbar erkennen, dass der Bodendruck für eine Querschnittsgrösse F sich in der Form

$$P = \gamma F h$$

darstellen wird, wo h eine Grösse von der Dimension einer Linie bezeichnet, welche wir wohl passend als Druckhöhe bezeichen dürfen. Bedenkt man, dass die Reibung im allgemeinen um so stärker sein wird, je grösser der Umfang U des Querschnittes ist, und dass andererseits die Gegenwirkung der Reibung gegen das Eigengewicht des Sandes um so stärker sein muss, je grösser der Flächeninhalt F ist, so wird es gerechtfertigt erscheinen,

$$h = \frac{F}{U} C$$

zu setzen, wo C einen Coefficienten bezeichnet, welcher zwar von der Form aber nicht mehr von den Dimensionen des Querschnittes abhängt. Er soll Druckcoefficient heissen.

Es ist nun aber bei

einem Spalt von der Breite $2b$ und der Länge l		einem Kreise vom Durchmesser $2r$
	der Flächeninhalt	
$F = 2bl$		$F = r^2\pi$
	und der Umfang	
$U = 2(l+2b)$		$U = 2r\pi$
	und folglich	
$\frac{F}{U} = b \quad (l = \infty)$		$\frac{F}{U} = \frac{r}{2}.$

Wir erhalten also aus dem oben ermittelten Werthe von P (beim Spalt für die Längeneinheit)

$$C = \frac{P}{2\gamma b^2} \qquad\qquad C = \frac{2P}{\gamma r^3 \pi}$$

$$= \frac{1+\sin^2\varphi - 2\sin\varphi\cos t - \Phi(t)}{\sin t \sin 2\varphi} \qquad\qquad = \frac{2}{3(1-\lambda)}\left\{\frac{w_1^2+\lambda}{w_1} - \frac{[1+(2\lambda-1)w_1^2]^{\frac{9\lambda-3}{4\lambda-2}}}{w_1^3}\Phi(w_1\right.$$

Hierin bedeutet φ den Reibungscoefficienten des Sandes und λ den Bruch $\frac{1-\sin\varphi}{1+\sin\varphi}$.

Ferner ist

beim Spalt	beim Kreise
$\Phi(t) = 2\sin\varphi\frac{t}{\sin t} - (1+\sin^2\varphi)$	$\Phi(w_1) = \frac{1}{1-2\lambda}\left\{\frac{1-\lambda+2\lambda^2}{1-5\lambda}[1+(2\lambda-1)w_1^2]^{-\frac{1-5\lambda}{2-4\lambda}} + \frac{1}{1+\lambda}[1+(2\lambda-1)w^2]^{\frac{1+\lambda}{2-4\lambda}} - \frac{(1-\lambda)(2+\lambda)(1-2\lambda)}{(1+\lambda)(1-5\lambda)}\right\}.$

Falls nun für die Grösse

$t' = \arcsin\frac{\operatorname{tang}\varphi'}{\operatorname{tang}\varphi}\left(0 < t' < \frac{\pi}{2}\right)$	$w' = \frac{\sqrt{\sin(\varphi+\varphi')} - \sqrt{\sin(\varphi-\varphi')}}{\sqrt{\sin(\varphi+\varphi')} + \sqrt{\sin(\varphi-\varphi')}}\frac{1}{\sqrt{\lambda}},$

in welcher $\operatorname{tang}\varphi'$ den Coefficienten der äusseren Reibung bezeichnet, die Function

$\Phi(t')$	$\Phi(w')$

noch einen reellen negativen Werth hat, so hat man in den obigen Ausdruck für den Druckcoefficienten an Stelle von

t die Grösse t'	w_1 die Grösse w'

zu setzen. In dem anderen Falle aber hat man für

t	w_1

die Wurzel der Gleichung

$\Phi(t) = 0$	$\Phi(w_1) = 0.$

zu nehmen.

Dieser zweite Fall kann offenbar nur dann eintreten, wenn die Wurzel

t''	w''

dieser Gleichung kleiner ist als der zu φ' gleich φ gehörende grösste Werth

$t' = \frac{\pi}{2}$	$w' = \frac{1}{\sqrt{\lambda}}.$

Das ist aber nur der Fall für das Gebiet

$\varphi > 90 - 2\,\frac{180}{\pi}\operatorname{arctang}\sqrt[4]{\frac{\pi-2}{\pi+2}} = 21^{0}3'53{,}880''$	$\varphi > 14^{0}26'25{,}102''$

oder

$\lambda < \sqrt{\frac{\pi-2}{\pi+2}} = 0{,}47120165$	$\lambda < 0{,}6008040,$

wo mit grosser Näherung an Stelle von

$$t'' \qquad\qquad\qquad\qquad w''$$

der Ausdruck gesetzt werden kann:

$$\frac{\lambda\sqrt{12}}{(1-0.3\lambda^2)(1+0.2\lambda^2)^{\frac{5}{2}}} \qquad\qquad \left\{\lambda\left(\frac{3-\lambda}{1-\lambda^2}-1\right)\right\}^{\frac{1}{2}}.$$

Ist nun bei solchen Werthen von φ

$$\text{tang}\ \varphi' \geqq \text{tang}\ \varphi\ \sin t'' \qquad\qquad \text{tang}\ \varphi' \geqq \frac{4w''\sqrt{\lambda}}{1+w''^2\lambda}\ \text{tang}\ \varphi,$$

so kommt für die Berechnung von P die Wurzel der Gleichung

$$\Phi(t) = 0 \qquad\qquad\qquad \Phi(w) = 0$$

zur Anwendung.

Für kleinere Werthe φ' ist ebenso, wie bei

$$\varphi < 21^0 3' 53,880'' \qquad\qquad \varphi < 14^0 26' 75,102''$$

für alle Werthe von φ', der Werth

$$t' \text{ an Stelle von } t \qquad\qquad w' \text{ an Stelle von } w_1$$

in den Ausdruck für C einzusetzen.

Die nachstehende Tabelle soll ein ungefähres Bild von dem Zusammenhang der Grössen φ und λ einerseits und der Druckcoefficienten bei dem Kreis und Spalt andererseits für den Fall geben, dass die Gefässwand sehr rauh ist ($\varphi' = \varphi$); es wird

für λ	φ	C beim Spalt	C beim Kreise
0.0	90^0	$\sqrt{\frac{4}{3}\lambda}$	$\sqrt{2\lambda}$
0.1	$54^0 54'$	0.407	0.494
0.2	$42^0 49'$	0.656	0.785
0.3	$32^0 32'$	0.937	1.103
0.4	$25^0 23'$	1.315	1.503
0.5	$19^0 29'$	1.869	2.058
0.6	$14^0 29'$	2.767	2.939
0.8	$6^0 27'$	7.587	7.690
1.0	0^0	$\frac{2}{1-\lambda}$	$\frac{2}{1-\lambda}$.

Man ersieht aus dieser Tabelle, dass die Druckcoefficienten für beide Formen des Querschnitts zwar nicht dieselben Werthe haben, aber doch

auch nicht zu beträchtliche Unterschiede aufweisen. Der Quotient derselben liegt zwischen 1.00 für $\lambda = 1$ und 1.22 für $\lambda = 0$. Zum Schluss möchte ich noch hervorheben, worin das scheinbar befremdliche Resultat, dass die Druckhöhe unendlich gross wird, wenn die Reibung gleich Null ist, seinen Grund hat. Für diesen Fall wie überhaupt für zu kleine Werthe des Reibungswinkels haben die Betrachtungen, vermittelst deren wir auf die in der Längsrichtung der Röhre gleichmässige Druckvertheilung geführt wurden, aus nahe liegenden Gründen keine Gültigkeit mehr.

Ueber einen besonderen Kettenbruch mit negativen Theilzählern nebst einleitenden allgemeineren Bemerkungen zur Convergenz oder Oscillation der Kettenbrüche.

(Von Herrn *Louis Saalschütz* in Königsberg.)

Schluss der Abhandlung Band 120, Seite 132—164.

---

§ 9.

Zusammenhang der asymptotischen Werthe von U_n mit der Convergenz des Kettenbruches (12).

Wir haben uns im Vorangehenden eingehend, fast, wie es scheinen könnte, zu umständlich mit den Gleichungen (10.) und (20.) beschäftigt: wir wollten dadurch eine vollkommen sichere Grundlage herstellen, um jeden etwaigen nachträglichen Zweifel an der Strenge unserer Folgerungen von vornherein auszuschliessen, und wenden uns nunmehr unserem eigentlichen Thema wieder zu.

Es sei der Kettenbruch X

$$(12.)\qquad X = \frac{X_1}{b_1} = 1/a_1 - b_2/a_2 - b_3/a_3 - \cdots,$$

worin von Anfang oder von einem endlichen Index n_0 an:

$$(13.)\qquad a_n = \alpha_0 n + \alpha_1,\quad b_n = \beta_0 n^2 + \beta_1 n + \beta_2,\qquad \alpha_0 \text{ und } \beta_0 \text{ positiv, } n \gtreqless n_0$$

zur Prüfung, bez. zur näherungsweisen Bestimmung vorgelegt. Dann bilden wir die Näherungsnenner $Q_1 = 1$, $Q_2 = a_1$, sodann $U_2 = \frac{Q_2}{Q_1} = a_1$, und dann successive durch die Gl. (10.) (oder auch direct durch (8.)) $U_3, U_4, U_5, \ldots U_n$ mindestens soweit, dass $n \gtreqless n_0$ geworden ist. Diesen Werth von U_n (wo also n beliebig nur $\gtreqless n_0$ zu wählen ist) halten wir nach Auflösung der Gl. (15.) mit dem Werthe (71.) zusammen. Mittels der bekannten Werthe von n und U_n berechnen wir aus dieser Gleichung $f(n)$ und nehmen zuerst an, *dass dieses von dem durch* (66.) *gegebenen Ausnahmswerth $F(n)$ verschieden sei.*

Dann nähert sich U_n mit wachsendem n dem Ausdrucke $A'n+B'$; es ist also

$$\lim_{n=\infty} \frac{U_n}{n} = A'.$$

Wir haben nun zu prüfen, ob die erste Convergenzregel des § 1 für negative Theilzähler erfüllt, also ob

$$\frac{a_n}{b_n} \frac{Q_n}{Q_{n-1}} - 1 > 1$$

ist. Es ist aber

$$\lim n \frac{a_n}{b_n} = \frac{\alpha_0}{\beta_0},$$

also

$$\lim \left(\frac{a_n}{b_n} U_n - 1\right) = \frac{\alpha_0 A' - \beta_0}{\beta_0} = \frac{A'(\alpha_0 - A'')}{A'A''} = \frac{A'}{A''}$$

d. i. grösser als 1; *der Kettenbruch convergirt.*

Wir nehmen nunmehr zweitens an, *dass $f(n)$ genau gleich dem Ausnahmswerth $F(n)$ sei.*

Dann geht nach § 7 die erste Auflösung in die zweite:

$$(72.) \qquad U_n = A''n + B'' + \frac{\gamma''}{c} \frac{\varphi(n)}{n}$$

über, und wir erhalten, ähnlich wie früher:

$$\lim \left(\frac{a_n}{b_n} U_n - 1\right) = \frac{A''}{A'} < 1.$$

Die zweite Convergenzregel lässt uns also erkennen: *Der Kettenbruch hat einen unendlich grossen Werth.*

Von diesen beiden Voraussetzungen ist die erste die allgemeine, die zweite kann nur eintreten, wenn $\gamma'' = 0$ oder wenn $\varphi(n)$ rational, also wenn γ'' sich durch die Gl. (73.) (für ein positives ganzes λ) bestimmen lässt. Das genügt aber noch nicht, sondern, es muss noch, wenn das Gesetz (13.) für die Theilzähler und Theilnenner mit $n=1$ oder 2 beginnt

$$U_2 = a_1 = 2A'' + B'' + \frac{\gamma''}{c} \frac{\varphi(2)}{2},$$

und wenn das Gesetz erst für $n = n_0$ beginnt, U_{n_0} gleich der rechten Seite von (72.) sein — eine Forderung, die im allgemeinen ***nicht*** erfüllt wird. Wird sie jedoch erfüllt und ist der Kbr. X also unendlich, so ist der Kbr. $1/a_1' - b_2/a_2 - b_3/a_3 - \cdots$, wo also nur an Stelle von a_1 irgend eine andere

Zahl a_1' getreten ist, nicht unendlich, trotzdem γ'' und $\varphi(n)$ dieselben Werthe behalten haben; und umgekehrt ist es möglich, wenn $\gamma''=0$ oder $\varphi(n)$ rational ist, den Kbr. X, wenn er nicht ∞ ist, in einen solchen durch Aenderung von a_1 umzuwandeln, und *auf diesem Wege auch zu summiren,* was im folgenden Paragraphen näher besprochen werden wird. Diese nahe Beziehung *convergenter* Kettenbrüche mit solchen *von unendlich grossem Werthe* im Gegensatz zu dem völlig anderen Charakter oscillirender Kettenbrüche gab die Veranlassung zur Einführung des Begriffes der Convergenz im weiteren Sinne.

Wir fassen nunmehr die Resultate dieses Paragraphen folgendermassen zusammen:

Wenn die Gl. (15.) *zwei reelle Wurzeln hat, so convergirt der Kettenbruch X immer im weiteren Sinne, und wenn er ausnahmsweise im gewöhnlichen Sinne nicht convergirt, so genügt eine willkürliche Aenderung von a_1, um einen convergenten Kettenbruch zu erzielen.*

Hierbei sind Specialitäten wie, dass b_n für ein gewisses n verschwinde, dass U_n ein Mal unendlich gross werde und dergleichen ausser Betracht geblieben. Dieselben werden in den folgenden Paragraphen besprochen werden.

Ist $\gamma'=0$, so lässt sich eine Function $f(n)$ nicht berechnen, trotzdem wird das obige Schlussresultat dadurch in keiner Weise beeinflusst; dennoch bedarf dieser Fall einer besonderen Behandlung, die ihm, um den Gang der Untersuchung nicht zu unterbrechen, am Schlusse dieses Aufsatzes, gleichsam anhangsweise, zu Theil werden soll.

§ 10.

Zweite Auflösung der Gl. (10.); näherungsweise oder genaue Summation des Kettenbruches X.

Wir betrachten den Kbr. $\frac{X_k}{b_k}$:

$$\frac{X_k}{b_k} = 1/a_k - b_{k+1}/a_{k+1} - b_{k+2}/a_{k+2} - \cdots \tag{75.}$$

und untersuchen zuerst, in welchem Zusammenhange mit den alten Constanten $A', A'', B', B''\,\gamma''$, die ihnen jetzt entsprechenden

$$A_k', A_k'', B_k', B_k'', \gamma_k''$$

stehen. Setzen wir

$$n = k+m-1,$$

so wird

$$a_n = \alpha_0(m+k-1)+\alpha_1 = \alpha'_0 m+\alpha'_1,$$
$$b_n = \beta_0(m+k-1)^2+\beta_1(m+k-1)+\beta_2 = \beta'_0 m^2+\beta'_1 m+\beta'_2,$$

woraus

$$\alpha'_0 = \alpha_0,\ \ \alpha'_1 = \alpha_0(k-1)+\alpha_1,$$
$$\beta'_0 = \beta_0,\ \ \beta'_1 = 2\beta_0(k-1)+\beta_1,\ \ \beta'_2 = \beta_0(k-1)^2+\beta_1(k-1)+\beta_2;$$

also ist zunächst:

$$A'_k = A', \qquad A''_k = A''$$

und die Substitution dieser Werthe und der Werthe $\alpha'_0, \alpha'_1, \beta'_0, \beta'_1$ in die Gleichungen

$$(16.)\qquad \begin{cases} B'_k = \dfrac{(\beta'_0-\beta'_1)-A'_k(\alpha'_0-\alpha'_1)}{c}, \\ B''_k = -\dfrac{(\beta'_0-\beta'_1)-A''_k(\alpha'_0-\alpha'_1)}{c} \end{cases}$$

liefert die Beziehungen:

$$(76.)\qquad \begin{cases} B'_k = B'+A'(k-1), \quad B''_k = B''+A''(k-1), \\ A'_k B''_k - A''_k B'_k = A'B''-A''B'; \end{cases}$$

somit bleibt diese Differenz und ebenso $\beta_2 - B''(A'+B')$, daher nach (22_a.) und (22_b.) ***auch*** γ'' ***und*** γ' ***invariant.***

Um nunmehr das neue $\varphi(m)$, welches wir als $\varphi_1(m)$ bezeichnen, zu bestimmen, setzen wir in (56.), welche Gleichung wir auf die Form (mit Restitution von γ'' statt $-\gamma''_1$)

$$(56^*.)\qquad \frac{\varphi(n+1)}{n+1} = \frac{(A'n+A'+B')\dfrac{\varphi(n)}{n} - c}{A''n+B''+\dfrac{\gamma''}{c}\dfrac{\varphi(n)}{n}}$$

bringen, m statt n, A'_k etc. statt A' etc., φ_1 statt φ und erhalten mit Hülfe der Gleichungen (76.):

$$\frac{\varphi_1(m+1)}{m+1} = \frac{(A'(m+k-1)+A'+B')\dfrac{\varphi_1(m)}{m} - c}{A''(m+k-1)+B''+\dfrac{\gamma''}{c}\dfrac{\varphi_1(m)}{m}};$$

der Vergleich dieser Gleichung mit der vorigen ergiebt

$$(76^*.)\qquad \frac{\varphi_1(m)}{m} = \frac{\varphi(m+k-1)}{m+k-1}.$$

Da A' und A'' dieselben Werthe behalten, muss der Kbr. (75.) mindestens ***im weiteren Sinne*** convergiren und wir fragen zunächst, wann sein Werth unendlich gross wird.

Die Bedingung für die Unendlichkeit von X war (Seite 241):

$$a_1 = 2A''+B''+\frac{\gamma''}{c}\frac{\varphi(2)}{2},$$

somit ist sie jetzt

$$a_k = 2A''_k+B''_k+\frac{\gamma''}{c}\frac{\varphi_1(2)}{2}$$

d. i. wegen der Gleichungen (76.) und (76*.)

$$a_k = A''(k+1)+B''+\frac{\gamma''}{c}\frac{\varphi(k+1)}{k+1}$$

oder, da nach (13.) und (22.):

$$a_k = (A'+A'')(k+1)+B'+B'',$$

auch:

$$A'(k+1)+B' = \frac{\gamma''}{c}\frac{\varphi(k+1)}{k+1}. \tag{77.}$$

Aber diese Gleichung lässt sich noch, falls nicht γ'' verschwindet, auf einfachere Form bringen. Ertheilen wir nämlich in der obigen (56*.) (mit k statt n) dem φ $(k+1)$ seinen Werth aus (77.), so erhalten wir für $\frac{\varphi(k)}{k}$ den Werth ∞.

Folglich ist die Bedingung dafür, dass $\frac{X_k}{b_k}$ unendlich gross wird, die Gl. (77.) oder die Gleichung

$$\frac{k}{\varphi(k)} = \frac{1}{\psi(k)} = 0. \tag{77*.}$$

Die Gl. (77.) hat $\lambda+1$ Wurzeln, die Gl. (77*.) nur λ, also fehlt noch eine Wurzel, wir werden sie später (in Gl. (94.)) angeben, bemerken aber gleich hier, dass deren Substitution für k nicht die Unendlichkeit von X_k hervorbringt.

Diese Gleichungen (77.) oder (77*.) lassen sich im allgemeinen durch positive ganze Werthe von k nicht erfüllen, jedenfalls ist aber die Anzahl ihrer Wurzeln beschränkt, also bleiben immer unendlich viele Werthe von k, für welche der Kbr. (75.) nicht unendlich wird, für welche er also im engeren Sinne convergirt.

Wenden wir uns nun diesem allgemeineren Falle zu, in welchem $\frac{X_k}{b_k}$ *und somit auch* X_k *im engeren Sinne convergirt.*

Wir verstehen unter ω eine sehr grosse positive ganze Zahl und betrachten den Theil $X_{k,\omega}$ des unendlichen Kettenbruches X_k*):

$$X_{k,\omega} = b_k/a_k - b_{k+1}/a_{k+1} - \cdots - b_{k+\omega}/a_{k+\omega}.$$

Derselbe wird sich als Function von k und ω auffassen lassen, da alle Theilzähler bez. Theilnenner in gleicher Art von ihrem Index abhängen, und die Gliederzahl $\omega+1$ ist. Sei also etwa

$$X_{k,\omega} = \varphi(k, \omega),$$

wo φ ein Functionszeichen ist. Dann ist bei Hinzunahme des nächsten Theilbruches:

$$X_{k,\omega+1} = \varphi(k, \omega+1).$$

Nun convergirt aber X_k, also unterscheidet sich $X_{k,\omega}$ von $X_{k,\omega+1}$ um eine desto geringere Grösse, je grösser ω angenommen war; man kann also, wenn nur ω genügend gross oder geradezu unendlich gross gewählt worden war, das zweite Argument unter dem Functionszeichen als irrelevant fortlassen und die Gleichungskette aufstellen:

$$X_{k,\omega} = X_{k,\omega+1} = \varphi(k, \omega+1) = \Phi(k) \qquad \lim \omega = \infty.$$

Wird aber das erste Argument geändert, so haben wir

$$X_{k+1,\omega+1} = \varphi(k+1, \omega+1) = \Phi(k+1) \qquad \lim \omega = \infty.$$

Gehen wir wirklich zur Grenze $\omega = \infty$ über, so ist also:

$$X_k = \Phi(k), X_{k+1} = \Phi(k+1);$$

d. h. X_k ist dieselbe Function von k, wie X_{k+1} von $k+1$ und überhaupt wie X_{k+m} von $k+m$. Nun ist aber, indem n statt k gesetzt wird,

$$X_n = \frac{b_n}{a_n - X_{n+1}}$$

also:

$$(78.) \qquad X_n(X_{n+1} - a_n) + b_n = 0.$$

Wird hier in dieser Gleichung U_n statt X_n, U_{n+1} statt X_{n+1} gesetzt, so entsteht genau die Gl. (10), *also ist* X_n *eine Auflösung genannter Gleichung* (10).

---

*) Vgl. zum Folgenden Seite 139 dieses Bandes.

Wir kennen zwei Auflösungen dieser Gleichung (siehe § 7 S. 160), *die allgemeine*

(71.) $$U_n = A'n + B' - \frac{\gamma'}{c}\frac{f(n)}{n},$$

worin $f(n)$ von n und dem Anfangswerthe $f(n_0)$ abhängig ist, und die *singuläre*, welche bei gewissen Werthen von γ'' eintreten kann,

(72.) $$U_n = A''n + B'' + \frac{\gamma''}{c}\frac{\varphi(n)}{n},$$

worin $\varphi(n)$ nur von n abhängt.

Welche der beiden kommt nun X_n zu?

Diese Frage ist in dem Falle leicht zu beantworten, wenn $X=\infty$ ist. Dann ist nämlich

$$a_1 = X_2$$

oder

$$U_2 = X_2.$$

Nun erfolgt aber die Herleitung der X_n $(n=3,4,\ldots)$ aus X_2 vermöge (78.), ebenso wie diejenige der U_n $(n=3,4,\ldots)$ aus U_2 vermöge (10.), also ist auch allgemein

$$U_n = X_n$$

und somit, wenn $n \gtreqless n_0$ geworden ist, weil für $X=\infty$ die Gl. (72.) gilt:

(79.) $$X_n = A''n + B'' + \frac{\gamma''}{c}\frac{\varphi(n)}{n}.$$

Dieser Werth *bleibt aber auch richtig,* wenn *nicht* $X=\infty$ ist. Der Beweis ist folgendermassen zu führen.

Es ist:

(80.) $$X = 1/a_1 - \ldots - b_n/a_n - X_{n+1}/1,$$

also

(81.) $$X = \frac{P_{n+1} - X_{n+1}P_n}{Q_{n+1} - X_{n+1}Q_n},$$

folglich

(82.) $$X - \frac{P_n}{Q_n} = \frac{P_{n+1}Q_n - Q_{n+1}P_n}{Q_n(Q_{n+1} - Q_nX_{n+1})}$$

oder

(83.) $$X - N_n = \frac{N_{n+1} - N_n}{\frac{Q_n}{Q_{n+1}}(U_{n+1} - X_{n+1})}.$$

Nun ist nach Voraussetzung X endlich; dann ist $X-N_n$ auch endlich, also folgt bereits aus (83.), dass U_{n+1} nicht gleich X_{n+1} sein darf*); doch wollen wir noch direct zeigen, dass sich diese Grössen in den *Hauptgliedern* von einander unterscheiden. Mittels der bekannten Gleichung

$$P_{n+1}Q_n - Q_{n+1}P_n = b_n(P_n Q_{n-1} - Q_n P_{n-1})$$

folgt aus (82.):

$$X - N_n = \frac{b_n(N_n - N_{n-1})}{U_n(U_{n+1} - X_{n+1})} \tag{84.}$$

und aus (83.), wenn $n-1$ statt n gesetzt wird,

$$X - N_{n-1} = \frac{U_n(N_n - N_{n-1})}{U_n - X_n}. \tag{85.}$$

Zieht man die vorige Gleichung von dieser ab, und hebt beide Seiten durch $(N_n - N_{n-1})$, so erhält man

$$1 = \frac{U_n}{U_n - X_n} - \frac{b_n}{U_n(U_{n+1} - X_{n+1})}. \tag{86.}$$

Diese Gleichung ist allgemein streng richtig; sie gilt für jedes n bis $n=\infty$ einschliesslich. Nehmen wir n so gross an, dass das *erste Glied* jeder der Grössen $b_n, U_n, U_{n+1}, X_n, X_{n+1}$ über ihren Werth entscheidet, und schreiben A, wenn wir es unentschieden lassen wollen, ob die erste oder zweite Wurzel der Gl. (15.) darunter zu verstehen sei; so können wir setzen:

$$b_n = \beta_0 n^2 + \cdots = A'A''n^2 + \cdots,$$
$$U_n = A'n + \cdots, \quad U_{n+1} = A'n + \cdots,$$
$$X_n = An + \cdots, \quad X_{n+1} = An + \cdots;$$

dies giebt, in (86.) eingesetzt:

$$1 = \frac{A'n + \cdots}{(A'-A)n + \cdots} - \frac{A''n + \cdots}{(A'-A)n + \cdots} = \frac{(A'-A'')n + \cdots}{(A'-A)n + \cdots},$$

also muss $A = A''$ sein und daher ist wiederum:

$$X_n = A''n + B'' + \frac{\gamma''}{c}\frac{\varphi(n)}{n}, \tag{87.}$$

w. z. b. w.

Diese Formel gilt für irrationales und für rationales $\varphi(n)$. Im ersten Falle ist $\varphi(n)$ vermöge (64.) und (65.) in ziemlich enge Grenzen eingeschlossen, *also kann man, wenn n nicht zu klein angenommen wird, hieraus X_n und dann durch directe Rückrechnung X selbst angenähert finden.*

*) Ist hingegen $X = \infty$, so muss gerade $X_{n+1} = U_{n+1}$ sein.

Im zweiten Falle, auf den wir sogleich näher eingehen wollen, und wohin auch der Specialfall $\gamma''=0$ zu rechnen ist, lässt sich, wenn $n \gtreqless n_0$ angenommen wird, aus (87.) genau X_n und hierdurch wieder genau X finden, oder auch direct X_1 und X, wenn $n_0=1$ ist. *Ist also $\varphi(n)$ rational, so lässt sich der Kbr. X summiren.*

Ein Beispiel hierfür dürfte wohl am Platze sein:

$$X_1 = 12/10-36/15-72/20-120/25-\cdots,$$

$$a_n=5(n+1), \quad b_n=6(n+1)n, \qquad n \gtreqless 1$$

also nach (15.) und (16.):

$$A'=3, \quad A''=2, \quad B'=0, \quad B''=0$$

und aus (22_a.) weil $\beta_2=0$ ist: $\gamma''=0$, daher nach (87.)

$$X_n = 2n$$

also

$$X_1=2, \quad X_2=4, \quad X_3=6, \text{ etc.*})$$

*) Vielleicht ist die Ableitung eines dieser Werthe, z. B. des Werthes von X_1 nach gewöhnlicher Methode erwünscht. Bezeichnet man die mit 2 multiplicirten Zähler und Nenner der Näherungswerthe dieses Kettenbruches mit R_n und S_n, und behält a_n und b_n in der Bedeutung des Textes bei, so ist:

$$a_2=15, \quad b_2=36 \text{ etc.}, \quad R_1=0, \quad R_2=72, \quad S_1=2, \quad S_2=30 \text{ etc.}$$

und

$$R_{n+1}=a_{n+1}R_n-b_{n+1}R_{n-1},$$
$$S_{n+1}=a_{n+1}S_n-b_{n+1}S_{n-1}.$$

Nun findet man durch Induction:

$$R_1=0, \quad R_2=72=12\cdot 3!1, \quad R_3=1440=12\cdot 4!5,$$
$$S_1=2!1, \quad S_2=30=3!5, \quad S_3=456=4!19,$$
$$R_n=12(n+1)!R'_n, \quad S_n=(n+1)!S'_n$$

und zwar

$$R'_n=3R'_{n-1}+2^{n-2}, \quad S'_n=3S'_{n-1}+2^{n-1}$$

und dieses Gesetz, das bis $n=3$ evident ist, lässt sich leicht durch den Schluss von n auf $n+1$ allgemein beweisen. Es ist nämlich:

$$R_{n+1}=12(n+2)!(5R'_n-6R'_{n-1}),$$
$$=12(n+2)!(5R'_n-2R'_n+2^{n-1})=12(n+2)!R'_{n+1}$$

also:

$$R'_{n+1}=3R'_n+2^{n-1};$$

ebenso ist der Beweis für den Nenner zu führen. Ferner ist $R'_2=S'_1=1$ und daher überhaupt:

$$R'_n=S'_{n-1},$$

folglich der n^{te} Näherungswerth N_n:

$$N_n=\frac{12(n+1)!R'_n}{(n+1)!S'_n}=12\frac{S'_{n-1}}{S'_n}.$$

Die obige Gl. (87.) wurde unter der Voraussetzung eines convergenten X_n abgeleitet, sie gilt aber auch, wenn X_n unendlich gross ist, denn dann ist auch ihre rechte Seite unendlich gross, wie aus der Bedingungsgleichung (77*.) folgt.

Wir müssen aber noch fragen, ob auch X_n gleichzeitig mit X unendlich werden kann, d. h. ob das Kriterium für die Unendlichkeit von X durch diejenige von X_n nicht alterirt wird? Jedenfalls muss gleichzeitig mit X und X_n dann auch U_n unendlich sein. Denn aus (83.) (mit $n-1$ statt n) folgt:

$$X = \frac{U_n N_n - X_n N_{n-1}}{U_n - X_n}.$$

Wäre nnn $U_n = \frac{Q_n}{Q_{n-1}}$ endlich, so wäre es auch $N_{n-1} = \frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}}$ und ebenfalls $U_n N_n = \frac{P_n}{Q_{n-1}}$, daher wäre

$$X = N_{n-1},$$

also *endlich*, was gegen die Voraussetzung ist, folglich ist auch U_n unendlich gross. Daraus folgt unmittelbar

$$Q_{n-1}=0, \quad N_{n-1}=\infty, \quad U_{n-1}=0,$$

ferner nach (10.):

$$U_{n-2}(U_{n-1}-a_{n-2})+b_{n-2}=0,$$

also:

$$\frac{a_{n-2}}{b_{n-2}} U_{n-2} - 1 = \frac{1}{b_{n-2}} U_{n-1} U_{n-2} = 0,$$

daher nach (6.)

$$\frac{N_{n-1}-N_{n-2}}{N_{n-2}-N_{n-3}} = \frac{1}{\frac{a_{n-2}}{b_{n-2}} U_{n-2} - 1} = \infty$$

Es ist aber:

$$\frac{S_2'}{S_1'} = 3 + \frac{2}{S_1'} = 3 + 2 > 3$$

$$\frac{S_3'}{S_2'} = 3 + \frac{2^2}{S_2'} = 3 + 2^2 \frac{S_1'}{S_2'} \begin{cases} > 3 \\ < 3 + 2 \cdot \frac{2}{3} \end{cases}$$

$$\frac{S_4'}{S_3'} = 3 + \frac{2^3}{S_3'} = 3 + 2^3 \frac{S_1'}{S_2'} \cdot \frac{S_2'}{S_3'} \begin{cases} > 3 \\ < 3 + 2 \cdot (\frac{2}{3})^2 \end{cases}$$

. . . .

$$\frac{S_n'}{S_{n-1}'} = 3 + \frac{2^{n-1}}{S_{n-1}'} = 3 + 2^{n-1} \frac{S_1'}{S_2'} \cdots \frac{S_{n-2}'}{S_{n-1}'} \begin{cases} > 3 \\ < 3 + 2 \cdot (\frac{2}{3})^{n-2} \end{cases}.$$

Mit wachsendem n nähert sich also $\frac{S_n'}{S_{n-1}'}$ der 3, und somit N_n der 4, was zu zeigen war.

(übereinstimmend mit $N_{n-1}=\infty$). Weiter ist aber:

$$\frac{a_{n-1}}{b_{n-1}}U_{n-1}-1=-1$$

und

$$\frac{a_n}{b_n}U_n-1=\infty,$$

aber allgemein:

$$\left(\frac{a_n}{b_n}U_n-1\right)\left(\frac{a_{n-2}}{b_{n-2}}U_{n-2}-1\right)=\frac{U_{n-2}}{b_{n-2}}\left(\frac{a_n}{b_n}U_nU_{n-1}-U_{n-1}\right)$$
$$=\frac{U_{n-2}}{b_{n-2}}\left(\frac{a_n}{b_n}\frac{Q_n}{Q_{n-2}}-\frac{Q_{n-1}}{Q_{n-2}}\right),$$

also in unserem Falle:

$$=\frac{U_{n-2}}{b_{n-2}}\frac{a_n}{b_n}\frac{Q_n}{Q_{n-2}},$$

folglich ist

$$\frac{N_{n-1}-N_{n-2}}{N_{n-2}-N_{n-3}}\cdot\frac{N_n-N_{n-1}}{N_{n-1}-N_{n-2}}\cdot\frac{N_{n+1}-N_n}{N_n-N_{n-1}}=\frac{N_{n+1}-N_n}{N_{n-2}-N_{n-3}}$$
$$=-\frac{1}{\frac{1}{b_{n-2}}\frac{a_n}{b_n}\frac{Q_n}{Q_{n-3}}},$$

also eine endliche Grösse, ebenso sind die vorangehenden und die folgenden Brüche weder Null noch unendlich. Aber auf das Product

$$\prod_{h=n_0}^{x}\frac{1}{\frac{a_h}{b_h}\frac{Q_h}{Q_{h-1}}-1}=\left(\prod_{h=n_0}^{n-3}\times\prod_{h=n-2}^{n}\times\prod_{h=n+1}^{\infty}\right)\frac{1}{\frac{a_h}{b_h}\frac{Q_h}{Q_{h-1}}-1}$$

gründeten sich, ihrem Ursprunge nach, die Convergenz-Regeln des § 1, also wird jetzt, da die ersten beiden Theil-Producte endlich an Gliederzahl und an Werth sind, und also das letzte unendliche Product das entscheidende bleibt, an den Ergebnissen derselben nichts geändert.

Die Gl. (79.) oder (87.) gilt also für endliches und unendliches X, für endliches und unendliches X_n; sie ist nur in *einem* Falle illusorisch, wenn nämlich $b_n=0$ und $\frac{X_n}{b_n}=\infty$ ist.

§ 11.

Consequenzen eines rationalen $\varphi(n)$; Verhalten des Kettenbruchs, wenn ein Theilzähler verschwindet. Beispiele.

Wir hätten keinen zwingenden Grund, auf die Umstände bei rationalem $\varphi(n)$ noch näher, als bereits in § 8 geschehen, einzugehen, *wenn wir den*

Fall** $b_n = 0$ **aus unserer Betrachtung ausschliessen könnten. Das dürfen wir aber nicht, weil das Verhalten des Kbrs. X ein anderes ist, jenachdem der eine oder der andere Factor von b_n, falls dieses überhaupt Null ist, verschwindet.

Wir beginnen die Discussion der Fälle $\gamma'' = 0$ oder $\varphi(n)$ rational damit, dass wir b_n durch $A'A''B'B''\gamma''$ ausdrücken. Dies ist mit Hülfe der Gleichungen (13.), (22.) und (22_a.) leicht ausführbar. Es folgt aus ihnen:

$$b_n = A'A''n^2 + (A'B'' + A''B' + A'A'')n + (A'+B')B'' + \gamma''$$

und das ist:

$$b_n = (A'(n+1)+B')(A''n+B'')+\gamma'';$$

hieraus ergiebt sich für verschwindendes γ''

$$(89.) \qquad b_n = (A'(n+1)+B')(A''n+B''),$$

und wenn γ'' durch (73.) gegeben ist:

$$(90.) \qquad b_n = (A'(n+\lambda+1)+B')(A''(n-\lambda)+B'').$$

Umgekehrt ist die Zerlegbarkeit von b_n in zwei rationale Factoren die Vorbedingung für ein rationales $\varphi(n)$, denn in diesem Falle besitzt die Gleichung (73.) für λ rationale Wurzeln; doch reicht dies noch nicht aus, sondern eine dieser Wurzeln muss eine ganze positive Zahl sein.

Möge nun zuerst $\gamma'' = 0$ sein, also β_2 den besonderen Werth

$$\beta_2 = B''(A'+B')$$

haben; dann wird der Gl. (77.) durch den einzigen Werth

$$(91.) \qquad k = -\frac{B'}{A'} - 1$$

genügt; und dieser Fall kann wirklich eintreten, wenn B' ein ganzes negatives Vielfaches von A' ist. Findet dieser besondere Umstand statt, so ist nach (89.) gleichzeitig $b_k = 0$, also ist in diesem Falle

$$X_k = 0 \cdot \infty.$$

Der Kbr. X_k ist unbestimmt und somit ist der Kbr. X auch unbestimmt, und zwar ***in der That, nicht nur der Form nach, unbestimmt,*** wofür, bevor andere Fälle gleicher Art zur Besprechung kommen, ein durchsichtiges Beispiel (für $k = 1$) gegeben werden mag.

Seien für einen Kbr. X_1 die Theilzähler und Theilnenner zuerst in gebräuchlicher Art durch die Gleichungen

$$a_n = 5n+1, \quad b_n = 6(n+1)(n-1) \qquad n \gtreqless 1$$

gegeben, dann ist $A' = 3$, $A'' = 2$, $B' = -6$, $B'' = 2$, $\gamma'' = 0$, folglich nach (87.)

$$X_n = 2n+2,$$

daher $X_2 = 6$ und

$$X_1 = \frac{b_1}{6-X_2} = \frac{0}{0}.$$

Aus diesem Resultat ist aber kein bestimmter Schluss zu ziehen.

Seien aber jetzt die allgemeineren Bestimmungen getroffen, welche, für $\delta = 0$, die früheren in sich schliessen:

$$a_1 = 6, \quad a_n = 5n+1+3\delta \quad \text{für } n \overline{\gtrless} 2$$
$$b_1 = 12\delta, \quad b_n = 6(n+1)(n-1+\delta) \quad \text{für } n \overline{\gtrless} 1,$$

wobei δ zwischen $+\frac{1}{2}$ und $-\frac{1}{2}$ liegen soll: dann ist wieder $\alpha_0 = 5$, $\beta_0 = 6$, also $A' = 3$, $A'' = 2$; ferner $\alpha_1 = 1+3\delta$, $\beta_1 = 6\delta$, $\beta_2 = 6(\delta-1)$, woraus $B' = 3(\delta-2)$, $B'' = 2$, $\gamma' = 6(3-\delta)$, $\gamma'' = 0$. Also sind A'', B'', γ'' von δ unabhängig und daher für jedes δ, da $n_0 = 2$ ist, $X_2 = 6$, und der Kbr. $\frac{X_1}{b_1}$ für jeden Werth von δ unendlich gross, falls nicht etwa ein b_n für $n > 1$ verschwände, was durch die Annahme der Grenzen, zwischen denen δ liegen soll, ausgeschlossen ist. Dieses Resultat wollen wir noch auf gewöhnliche Art bestätigen. Mittels der Gl. (3.) gewinnt man bekanntlich, wenn N_n die Näherungswerthe des Kbrs. $X = \frac{X_1}{b_1}$ sind, folgende Reihe:

$$N_n = \frac{1}{Q_1 Q_2} + \frac{b_2}{Q_2 Q_3} + \frac{b_2 b_3}{Q_3 Q_4} + \cdots + \frac{b_2 b_3 \ldots b_{n-1}}{Q_{n-1} Q_n}$$

darin ist, wie aus $Q_1 = 1$, $Q_2 = 6$ und weiterhin durch Induction folgt:

$$Q_n = 6 \cdot 8 \ldots (2n+2)$$

und daher

$$\frac{b_2 b_3 \ldots b_{n-1}}{Q_{n-1} Q_n} = \frac{3^{n-2}(1+\delta)(2+\delta)\ldots(n-2+\delta)}{6 \cdot 8 \cdot 10 \cdot \ldots (2n+2)}$$
$$= \frac{1}{(n-1)n(n+1)} \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{n-2} (1+\delta)\left(1+\frac{\delta}{2}\right)\left(1+\frac{\delta}{3}\right) \cdots \left(1+\frac{\delta}{n-2}\right).$$

Lässt man also n mehr und mehr wachsen, so werden die Glieder der Reihe, da δ mindestens $-\frac{1}{2}$ ist, immer grösser, also ihre Summe, d. i. N_∞ unendlich gross. Daher ist:

$$X = \frac{X_1}{b_1} = N_\infty = \infty,$$

also:

$$X_1 = 12\delta\cdot\infty$$

und für $\delta = 0$: $X_1 = 0\cdot\infty$ d. i. thatsächlich vollkommen unbestimmt, wie $\frac{\delta}{1-x}$ für $x = 1$ und $\delta = 0$.

Ist nun γ'' nicht Null, aber derart mit den Constanten A', A'', B', B'' verknüpft, dass die Gleichung

$$\text{(73.)} \qquad \gamma'' = (A'B''-A''B'-A'A'')\lambda-A'A''\lambda^2$$

gilt, worin λ eine beliebige positive ganze Zahl bedeutet, so gilt für b_n die Gl. (90.), und wir unterscheiden nun, ob ein bestimmtes b_k des ersten oder des zweiten Factors wegen verschwindet.

Sei erstens

$$\text{(92.)} \qquad A'(k+\lambda+1)+B' = 0;$$

dann hat, wie am Ende des § 8 (mit $n = k+1$) bemerkt worden, $\psi(k+1)$ den einfachen Werth:

$$\text{(93.)} \qquad \psi(k+1) = -\frac{c}{A''k+B''}.$$

Wir behaupten nun, dass die Gl. (77.), wenn γ'' den obigen Werth hat, durch den Werth:

$$\text{(94.)} \qquad k = -\frac{B'}{A'}-\lambda-1$$

befriedigt wird.

In der That entsteht durch Substitution von k aus (92.) in die rechte Seite von (93.) mit Rücksicht auf (73.) die Gleichung

$$\text{(95.)} \qquad \psi(k+1) = -\frac{A'c\lambda}{\gamma''},$$

und aus (92.) und (95.) folgen die Gleichungen

$$\text{(96.)} \qquad A'(k+\lambda+1)+B' = 0,$$

$$\text{(97.)} \qquad -A'\lambda = \frac{\gamma''}{c}\frac{\varphi(k+1)}{k+1},$$

deren erstere mit (94.) identisch ist, und deren Addition die Gl. (77.) ergiebt. *Der Werth* (94.) *für k ist also die zu den Wurzeln der Gl.* (77*) *hinzukommende* $(\lambda+1)^{te}$ *Wurzel der Gl.* (77.). Und es ist daher in diesem Falle:

$$\frac{X_k}{b_k} = \infty, \quad b_k = 0, \quad X_k = 0\cdot\infty = \text{unbestimmt}.$$

Wird für X_k der aus (87.) folgende Ausdruck genommen, so ist dies als Willkür zu betrachten*), ebenso als würde man den durch successive Berechnung der Näherungswerthe für X_k sich constant als Null ergebenden Werth für den richtigen halten. *Der Kbr. X_k ist eben vollkommen unbestimmt, und der Kbr. X mit ihm.*

Der Werth (94.) ist zwar immer eine Wurzel der Gl. (77.), sie hat aber nur dann für uns Bedeutung, wenn es eine positive ganze Zahl, also wenn B' negativ und

$$(98.)\qquad -\frac{B'}{A'} > \lambda+1$$

ist. Ausser dieser Wurzel hat die Gl. (77.), noch diejenigen der Gl. (77*.), welche ebenfalls ganz oder theilweise positive ganze Zahlen und grösser oder kleiner als die Wurzel (94.) sein können. Sind solche Wurzeln *neben* (94.) vorhanden, so bleibt der Kbr. X_k und somit auch der Kettenbruch X selbst unter allen Umständen unbestimmt. Wird aber (94.) bedeutungslos, weil es keine ganze positive Zahl ist, so gewinnen die anderen Wurzeln von (77.) Bedeutung, welche, wie oben gezeigt, das betreffende $X_k : b_k$ d. i. X_k unendlich werden lassen.

Sei zweitens

$$(99.)\qquad A''(k-\lambda)+B'' = 0.$$

Dann verschwindet, wie am Ende des § 8 angegeben ist, $A''k+B''+\frac{\gamma''}{c}\psi(k)$. Dieser Ausdruck hat eine doppelte Bedeutung: er ist der Nenner der rechten Seite der Gl. (56*.) (hinter (76.)) und ist nach (87.) der Werth von X_k. Der ersten Bedeutung wegen darf die Gl. (56*.) nicht damit multiplicirt werden. Setzt man aber in den Zähler nach Multiplication mit $\frac{\gamma''}{c}$ für $\psi(k)$ den Werth:

$$\psi(k) = -\frac{c}{\gamma''}(A''k+B'')$$

und für γ'' seinen Werth aus (73.) ein, so nimmt er die Form

$$-\{A'(k+\lambda+1)+B'\}\{A''(k-\lambda)+B''\}$$

an, folglich wird

$$\psi(k+1) = \frac{0}{0},$$

*) Geschieht es dennoch, so gelangt man für X_1 zu dem ebenfalls aus (87.) mit $n = 1$ folgenden Werth.

also unbestimmt und die Gl. (77.) wird ***nicht*** erfüllt. Hingegen verschwindet X_k*) und wir haben das Resultat:

Wenn b_k wegen seines ersten Factors verschwindet, so wird X_k unbestimmt und der Kbr. X mit ihm; wenn b_k seines zweiten Factors wegen verschwindet, so verschwindet auch X_k und der Kettenbruch bricht ab. Er wird aber auch jetzt durch (87.) richtig angegeben, und zwar ist für $n_0 = 1$:

$$X_1 = A'' + B'' + \frac{\gamma''}{c}\psi(1), \qquad X = \frac{X_1}{b_1} \tag{100.}$$

Verschwindet b_n für $n = k$, ohne dass die Gl. (73.) durch ein ganzes positives λ erfüllbar ist, so bricht der Kbr. X ebenfalls ab, kann aber nur durch directe Berechnung gefunden werden, — was im vorigen Falle natürlich auch möglich ist.

Die folgenden Beispiele, womit wir den vorliegenden Theil der Arbeit schliessen, mögen einige Möglichkeiten veranschaulichen, die bei rationalem $\psi(n)$ eintreten können.

Beispiele:

1. $a_n = 5n-8$, $b_n = 3(n-2)(2n-3)$, daraus $A' = 3$, $A'' = 2$, $c = 1$, $B' = -12$, $B'' = -1$, $\beta_2 = 18$, $\gamma'' = 9$; dies genügt der Gl. (73.) für $\lambda = 1$; daher (siehe Gl. (74.)):

$$\psi(n) = \frac{1}{n-6}$$

und folglich wird Gl. (77.):

$$3(k+1)-12 = \frac{9}{k-5}.$$

Ihre Wurzeln sind $k = 2$ und $k = 6$, folglich ist $\frac{X_2}{b_2} = \infty$ und $\frac{X_6}{b_6} = \infty$, dabei ist $b_2 = 0$, $b_6 = 108$, also ist auch $X_6 = \infty$; wir haben somit:

$$\frac{X_2}{b_2} = 1/2 - 9/7 - 30/12 - 63/(17 - X_6) = 1/2 - 9/7 - 30/12$$

mit den Näherungswerthen $\frac{0}{1}$, $\frac{1}{2}$ $\frac{7}{5}$, $\frac{54}{0} = \infty$, wie es sein soll. X_1 wird also ***unbestimmt.*** Unter Umständen lässt sich übrigens die Unbestimmtheit durch künstlich formulirte Annahmen vermeiden. Wäre nämlich z. B. b_n statt

*) Daraus folgt noch: Wenn die Gl. (77.) für $k = 1$ erfüllt wird, also $X = \infty$ ist, und wenn b_n des zweiten Factors wegen, also zugleich mit X_n verschwindet, so ist $Q_n = 0$, ebenso wenn die Gl. (77.) für ein $k < n$ erfüllt wird, wobei nur die Zählung der Indices von diesem k zu beginnen hat; wird aber (77.) für kein $k < n$ befriedigt, so ist $U_{n+1} = a_n$.

durch den obigen Ausdruck durch folgenden, scheinbar mit ihm identischen, worin p und q gegebene Zahlen sind:

$$b_n = \lim_{\delta=0} 3(n+p\delta-2)(2n-3)+q\delta$$

gegeben, so bliebe X_6 für $\delta = 0$ unendlich, hingegen würde:

$$\frac{X_2}{b_2} = \frac{54-(15p+q)\delta}{-(138p+14q)\delta},$$

$$b_2 = (3p+q)\delta,$$

daher

$$X_2 = \frac{(3p+q)(54-(15p+q)\delta)}{-(138p+14q)},$$

d. i. für $\delta = 0$

$$X_2 = -\frac{54(3p+q)}{138p+14q},$$

also von $\frac{p}{q}$ in bestimmter Art abhängig, z. B.

$$X_2 = 0 \quad \text{für } \frac{p}{q} = -\frac{1}{3}, \qquad X_2 = \infty \quad \text{für } \frac{p}{q} = -\frac{7}{69}.$$

2. $a_n = 5(n-7)$, $b_n = 6(n-6)(n-9)$, $A' = 3$, $A'' = 2$, $c = 1$, $B' = -24$, $B'' = -16$, $\gamma'' = -12$, $\lambda = 1$, $\psi(n) = \frac{1}{n-3}$; Gl. (77.) erfüllt für $k = 3$, $k = 6$, b_n verschwindet für $n = 6$, $n = 9$. Also

$$X_9 = 0, \qquad \frac{X_6}{b_6} = 1/(-5)+12/0+12/5 = \infty, \qquad X_6 = 0\cdot\infty,$$

also auch X_3 und X selbst unbestimmt.

3. $a_n = 7n-34$, $b_n = 2(5n-17)(n-8)$; $A' = 5$, $A'' = 2$, $c = 3$, $B' = -27$, $B'' = -14$, $\gamma'' = -36$, $\lambda = 1$, $\psi(n) = \frac{1}{n-2}$; Gl. (77.) erfüllt für $k = 2$ und für das interesselose $k = \frac{17}{5}$. b_n verschwindet für $n = 8$ und das interesselose $n = \frac{17}{5}$; also ist $X_8 = 0$,

$$\frac{X_2}{b_2} = 1/(-20)-20/(-13)+24/(-6)+48/(+1)+52/8+36/15$$

$$= -\frac{1872}{0} = \infty, \text{ wie es sein soll, } X_2 = \infty, \text{ daher}$$

$$X_1 = \frac{168}{-27+X_2} = 0.$$

4. $a_n = 5(n-5)$, $b_n = 6(n-6)(n-4)$; daher:

$$X = 90/(-20)-48/(-15)-18/(-10)-0/(-5)+6/0-0/5-18/10-\cdots$$

$$Q_1 = 1, \quad Q_2 = -20, \quad Q_3 = 252, \quad Q_4 = -2160, \quad Q_5 = 10800 = a_4\cdot Q_4;$$

ferner:

$$A' = 3, \quad A'' = 2, \quad B' = -24, \quad B'' = -6;$$

$\gamma'' = 18$, $\lambda = 1$, $\psi(n) = \frac{1}{n-13}$; Gl. (77.) erfüllt für $k = 6$ und $k = 13$, $b_n = 0$ für $n = 4$ (zweiter Factor) und $n = 6$ (erster Factor), also $X_{13} = \infty$, $\frac{X_6}{b_6} = \infty$ und in der That

$$\frac{X_6}{b_6} = 1/5 - 18/10 - \cdots - 210/30 = \frac{58320}{0},$$

$X_6 = 0 \cdot \infty$ also unbestimmt, daher X_4 ebenfalls unbestimmt, trotzdem $b_4 = 0$ ist*), und in Folge dessen X selbst unbestimmt.

5. $a_n = 7n + 17$, $b_n = 10(n+2)(n+4)$; $A' = 5$, $A'' = 2$, $c = 3$, $B' = 0$, $B'' = 10$; $\gamma'' = 30$, $\lambda = 1$; $\psi(n) = \frac{1}{n-1}$. Gl. (77.) erfüllt für $k = 1$ und das interesselose $k = -2$, wofür auch b_k verschwindet, also ist $\frac{X_1}{b_1}$ und X_1 unendlich und daher $X_2 = 24$, was mit Gl. (87.) stimmt.

§ 12.

(Zusatz zu § 9.)

Die Behandlung des Falles $\gamma' = 0$.

Wenn γ' verschwindet, so genügt der Ausdruck

$$U_n = A'n + B'$$

genau der Functionalgleichung (10.), und ist nun auch noch

$$a_1 = U_2 = 2A' + B',$$

so ist alles in schönster Ordnung. Im allgemeinen ist aber nicht $a_1 = 2A' + B'$; dies hat in der Sache selbst zwar wenig zu sagen, denn, wird

$$X' = \frac{1}{2A' + B' - X_2}$$

gesetzt, wo X_2 die bisherige Bedeutung

$$X_2 = b_2/a_2 - b_3/a_3 - \cdots$$

---

*) Es brauchte nämlich nur, da $a_5 = 0$ ist, X_6, welches willkürlich ist, den Werth: $-\frac{b_5}{a_4}$ zu erhalten, um $X_4 = \frac{0}{0}$ zu machen.

hat, so convergirt dieser Kettenbruch, der Kbr. X ist aber nun:

$$X = \frac{1}{a_1 - X_2} = \frac{1}{a_1 - (2A' + B') + \frac{1}{X'}},$$

hat also ebenfalls einen bestimmten endlichen Werth, falls nicht gerade

$$a_1 = U_2 = \left[A''n + B'' + \frac{\gamma''}{c}\frac{\varphi(n)}{n}\right]_{n=2}$$

ist, in welchem Falle $X = \infty$ wäre.

Dennoch fehlt die wissenschaftliche Befriedigung solange, bis man weiss, *ob* und *in welcher Art* U_n, wenn $\gamma' = 0$ ist, dem Werthe $A'n + B'$, von dem es anfänglich verschieden ist, zustrebt.

Um dies zu erfahren, setzen wir

$$\text{(a)} \qquad U_n = A'n + B' + \frac{1}{\Theta(n)}$$

und erhalten, vermöge (10.) zwischen $\Theta(n+1)$ und $\Theta(n)$ folgende Functionalgleichung

$$\text{(b)} \qquad \Theta(n+1) = \frac{(A'n + B')\Theta(n) + 1}{A''n + A'' + B''}.$$

Mit welchem n, $n = n_0$, wir beginnen, ist gleichgültig, jedenfalls sei es aber so gross, dass $A'n_0 + B'$ und $A''(n_0 + 1) + B''$ positiv sind. $\Theta(n_0)$ wird erhalten aus dem Vergleich des direct mittels (8.) berechneten und des obigen Werthes für U_n. Dabei kann $\Theta(n_0)$ sich als positiv oder negativ ergeben.

Sei zuerst $\Theta(n_0)$ positiv. Dann ist:

$$\text{(c)} \qquad \Theta(n+1) > \frac{A'n + B'}{A''n + A'' + B''} \cdot \Theta(n),$$

aber der erste Factor:

$$\text{(d)} \qquad \frac{A'n + B'}{A''n + A'' + B''} = \frac{A'}{A''} - \frac{A'B'' - A''B' + A'A''}{A''(A''n + A'' + B'')}$$

nähert sich mit wachsendem n dauernd der Zahl $\frac{A'}{A''}$, welche grösser als 1 ist, und wird schon für ein *endliches* n, auch wenn $A'B'' - A''B' + A'A''$ positiv ist, grösser als 1. Setzt man also in obige Ungleichung (c) successive $n = n_0, n_0 + 1, n_0 + 2, \ldots \omega$, und multiplicirt alle Ungleichungen mit einander, so folgt

$$\text{(e)} \qquad \lim_{\omega = \infty} \Theta(\omega) = C \cdot \left(\frac{A'}{A''}\right)^{\omega},$$

wo C eine positive, von Null verschiedene Constante ist, $\Theta(\omega)$ nähert sich also der Unendlichkeit.

Wäre ferner $\Theta(n_0)$ sehr nahe an 0, so ist $\Theta(n_0+1)$ jedenfalls positiv; wir kommen also auf die frühere Betrachtung zurück.

Endlich sei $\Theta(n_0)$ und auch $\Theta(n)$, mindestens für einen oder für einige Werthe von $n > n_0$, negativ $= -\Theta_1(n)$; dann ist:

$$\text{(f)} \qquad \Theta_1(n+1) = \frac{(A'n+B')\Theta_1(n)-1}{A''n+A''+B''};$$

hier kann $\Theta_1(n+1) = \Theta_1(n)$ werden, und zwar geschieht dies für den Werth:

$$\text{(g)} \qquad \Theta_1(n) = \frac{1}{cn+B'-A''-B''} \equiv \overset{n}{\Theta}.$$

Nun setzen wir

$$\Theta_1(n+1) = \Theta_1(n)+\delta;$$

dann folgt aus (f):

$$\Theta_1(n)(cn+B'-A''-B'')-\delta(A''n+A''+B'')-1 = 0.$$

Ist also

$$\text{(h)} \qquad \begin{cases} \Theta_1(n) = \overset{n}{\Theta}, & \text{so ist } \delta = 0, \quad \Theta_1(n+1) = \Theta_1(n), \\ \Theta_1(n) < \overset{n}{\Theta}, & \text{so ist } \delta \text{ neg.}, \quad \Theta_1(n+1) < \Theta_1(n), \\ \Theta_1(n) > \overset{n}{\Theta}, & \text{so ist } \delta \text{ pos.}, \quad \Theta_1(n+1) > \Theta_1(n), \end{cases}$$

Nun nimmt $\overset{n}{\Theta}$, wie (g) zeigt, mit wachsendem n ab, also nimmt im ersten und letzten Falle $\Theta_1(n)$ mit wachsendem n zu, und die Differenz $\Theta_1(n)-\overset{n}{\Theta}$ wird mit wachsendem n immer grösser, *hat* also schon anfänglich oder *erreicht* sofort einen *positiven, von Null verschiedenen Werth.*

Wir wollen nun zeigen, dass sich $\Theta_1(n)$ mit wachsendem n der Unendlichkeit nähert.

Wir bezeichnen zur Abkürzung den Coefficienten von $\Theta_1(n)$ in (*f*) für $n = n_0$, n_0+1, n_0+2 etc. mit bez. f_0, f_1, f_2 etc. und stellen die Gleichungen auf:

$$\Theta_1(n_0+1) = f_0\Theta_1(n_0) - \frac{1}{A''n_0+A''+B''},$$

$$\Theta_1(n_0+2) = f_1\Theta_1(n_0+1) - \frac{1}{A''(n_0+1)+A''+B''},$$

$$\Theta_1(n_0+3) = f_2\Theta_1(n_0+2) - \frac{1}{A''(n_0+2)+A''+B''},$$

etc.

Die Elimination der Zwischenfunctionen aus diesen Gleichungen liefert:

$$\text{(i)}\qquad \Theta_1(n_0+m+1) = f_0 f_1 f_2 \cdots f_m \cdot K,$$

wobei:

$$\text{(k)}\qquad \begin{cases} K = \Theta_1(n_0) - \dfrac{1}{f_0(A''(n_0+1)+B'')} - \dfrac{1}{f_0 f_1(A''(n_0+2)+B'')} \\ \qquad\qquad - \dfrac{1}{f_0 f_1 f_2(A''(n_0+3)+B'')} - \cdots. \end{cases}$$

Nun können $f_0, f_1, f_2, \cdots$ entweder wachsend oder abnehmend sich dem Grenzwerthe $\frac{A'}{A''}$ nähern, jenachdem nämlich (siehe (d)) $A'B''-A''B'+A'A''$ positiv oder negativ ist. Im *ersten Falle* kann (siehe ib.) n_0 so gross gewählt werden, dass $f_0 > 1$ ist, und die abzuziehende Reihe in (k) ist dann kleiner als

$$\frac{1}{A''(n_0+1)+B''}\left(\frac{1}{f_0}+\frac{1}{f_0^2}+\frac{1}{f_0^3}+\cdots\right) = \frac{1}{A''(n_0+1)+B''}\cdot\frac{1}{f_0-1} = \overset{n_0}{\Theta},$$

also ist

$$K > \Theta_1(n_0) - \overset{n_0}{\Theta},$$

d. i. eine positive von Null verschiedene Grösse, falls $\Theta_1(n_0-1) \gtreqless \overset{n_0-1}{\Theta_1}$ genommen wird, und daher:

$$\text{(l)}\qquad \Theta_1(n_0+m+1) > K\cdot f_0^{m+1},$$

also $\Theta_1(n)$ eine mit wachsendem n der Unendlichkeit zustrebende Zahl.

Im *zweiten Falle* schreiben wir die subtractive Reihe in (k) mit directer Einsetzung der Werthe von f_0, f_1, f_2 etc. folgendermassen:

$$\text{(m)}\qquad \begin{cases} \dfrac{1}{A'n_0+B'}\left\{1+\dfrac{A''(n_0+1)+B''}{A'(n_0+1)+B'}+\dfrac{(A''(n_0+1)+B'')(A''(n_0+2)+B'')}{(A'(n_0+1)+B')(A'(n_0+2)+B')}+\cdots\right\} \\ \qquad\qquad \equiv \dfrac{1}{A'n_0+B'}K', \end{cases}$$

indem wir die Klammer mit K' bezeichnen. Dieses K' formen wir etwas um, indem wir

$$n_0+1+\frac{B''}{A''} = p,\quad n_0+1+\frac{B'}{A'} = q,\quad \frac{A''}{A'} = x$$

setzen, so dass

$$\text{(n)}\qquad K' = 1+\frac{p}{q}x+\frac{p(p+1)}{q(q+1)}x^2+\frac{p(p+1)(p+2)}{q(q+1)(q+2)}x^3+\cdots$$

wird. Nun ist

$$q-p-1 = \frac{B'A''-A'B''-A'A''}{A'A''};$$

dies ist, wie (d) zeigt, positiv, da die Grössen $f_0, f_1, f_2, \cdots$ sich, von der grösseren Seite her abnehmend, dem Grenzwerthe $\frac{A'}{A''}$ nähern, also convergirt die Reihe K' bis $x=1$ einschliesslich und hat in diesem Falle, nach bekannter Formel über die hypergeometrische Reihe, den Werth:

$$K_{(x=1)} = \frac{q-1}{q-p-1}. \tag{o}$$

Andererseits ist

$$cn_0 + B' - A'' - B'' = (A'n_0 + B') - (A''(n_0+1) + B'') = (A'n_0 + B')(1 - \frac{p}{q-1}x)$$

also nach (g):

$$\overset{n_0}{\Theta} = \frac{1}{A'n_0 + B'} \cdot \frac{1}{1 - \frac{p}{q-1}x},$$

wo der erste Factor derselbe wie derjenige von K' in (m) ist und der zweite mit F':

$$F' = \frac{1}{1 - \frac{p}{q-1}x} \tag{p}$$

bezeichnet werden möge. *Ist nun die unendliche Reihe K' höchstens gleich F', so ist die abbrechende subtractive Reihe in* (k) *kleiner als $\overset{n_0}{\Theta}$ (oder diesem für $m=\infty$ höchstens gleich).*

Nun ist für $x=0$ und für $x=1$ (siehe (n), (o) und (p)):

$$F' = K';$$

entwickeln wir aber F', was wegen $p < q-1$ bis $x=1$ einschliesslich angänglich ist, also:

$$F' = 1 + \frac{p}{q-1}x + \left(\frac{p}{q-1}\right)^2 x^2 + \left(\frac{p}{q-1}\right)^3 x^3 + \cdots, \tag{q}$$

so ist

$$\frac{p}{q-1} > \frac{p}{q},$$

also sind die ersten Coefficienten in (q) grösser als die betreffenden in (n); das Verhältniss derselben v_h ist:

$$\frac{\text{Coeff. in } F'}{\text{Coeff. in } K'} = v_h = \frac{q(q+1)\cdots(q+h-1)}{p(p+1)\cdots(p+h-1)}\left(\frac{p}{q-1}\right)^h$$

und wächst bis $h = h_m$, wofür:

$$\frac{q+h_m-1}{p+h_m-1} \cdot \frac{p}{q-1} = 1$$

oder

$$h_m = \frac{q-1}{q-1-p}$$

ist; für $h > h_m$ nimmt v_h wieder ab, und zwar, da v_{h_m} eine endliche Grösse ist und das Product $\frac{q+h-1}{p+h-1}\frac{p}{q-1}$ sich mit wachsendem h mehr und mehr (von oben her) dem echten Bruche $\frac{p}{q-1}$ nähert, bis zur Null herab, sodass v_h bis zu einem endlichen Werthe von h, etwa $h=k$, grösser oder gleich 1 für $h>k$, kleiner als 1 sein wird. Ziehen wir daher K' von F' ab und verstehen unter $C_1, C_2, C_3 \cdots$ positive Grössen, so erhalten wir eine Reihe folgender Form:

$$F'-K' = C_1 x + C_2 x^2 + \cdots + C_k x^k - C_{k+1} x^{k+1} - C_{k+2} x^{k+2} - \cdots.$$

Da für $x=1$ aber $F'=K'$ ist, so muss, mit Einführung der Bezeichnung S:

$$C_1 + C_2 + \cdots + C_k = C_{k+1} + C_{k+2} + \cdots = S$$

sein, also wird

$$C_1 x + C_2 x^2 + \cdots + C_k x^k = S \cdot \vartheta_1,$$

$$C_{k+1} x^{k+1} + C_{k+2} x^{k+2} + \cdots = S \cdot \vartheta_2;$$

darin ist ϑ_1 ein echter Bruch zwischen x und x^k, ϑ_2 ein solcher zwischen x^{k+1} und 0, also

$$\vartheta_1 > \vartheta_2$$

und daher

$$F'-K' = S(\vartheta_1 - \vartheta_2) > 0$$

$$F' > K',$$

w. z. b. w.

Wiederum ist also K eine von Null verschiedene Grösse und daher nach (i)

$$\text{(r)} \qquad \Theta_1(n_0+m+1) > K\left(\frac{A'}{A''}\right)^{m+1}$$

also in der Grenze für $m = \infty$;

$$\Theta_1(\infty) = \infty \cdot -$$

Im ersten und dritten Falle (h) nähert sich also $\Theta_1(n)$, so wie vorher das positive $\Theta(n)$ mit wachsendem n der Unendlichkeit.

Wir haben nun noch den zweiten der drei Fälle (h) zu besprechen, dass nämlich $\Theta(n_0)$ negativ $= -\Theta_1(n_0)$ und $\Theta_1(n_0) > \overset{n_0}{\Theta}$ ist. Dann nimmt,

wie daselbst gezeigt worden, $\Theta_1(n)$ mit wachsendem n zunächst ab, $\overset{n}{\Theta}$ nimmt aber auch mit wachsendem n ab, also kann entweder $\Theta_1(n)$ grösser als das betreffende $\overset{n}{\Theta}$ werden und dadurch in das Intervall des bisher behandelten (dritten) Falles übertreten, oder $\Theta_1(n)$ bleibt unterhalb $\overset{n}{\Theta}$, wird immer kleiner und schliesslich negativ, d. h. tritt in das Intervall eines positiven $\Theta(n)$ über, welcher Fall zu Anfang behandelt worden ist, oder $\Theta_1(n)$ bleibt immer unterhalb $\overset{n}{\Theta}$, ohne jedoch negativ zu werden. Dies letztere Verhalten deutet auf den Ausnahmsfall hin, in welchem der Kettenbruch unendlich ist. Denn, setzen wir

$$\Theta_1(n) = \frac{1}{\vartheta(n)},$$

so kann sich $\vartheta(n)$ langsamer oder schneller oder ebenso schnell wie der Nenner von $\overset{n}{\Theta}$, d. i. wie eine Grösse von der Ordnung n der Unendlichkeit nähern. Im ersten Falle ist

$$\Theta_1(n) - \overset{n}{\Theta} = \frac{cn+B'-A''-B''-\vartheta(n)}{\vartheta(n)(cn+B'-A''-B'')}$$

und dies wird bei genügend grossem n positiv, also $\Theta_1(n) > \overset{n}{\Theta}$.

Im zweiten Falle ist nach (f):

$$\Theta_1(n+1) = \frac{\frac{A'n+B'}{\vartheta(n)} - 1}{A''n+A''+B''},$$

und hier wird die rechte Seite negativ; also bleibt nur die dritte Annahme:

$$\vartheta(n) = Cn + \cdots$$

übrig, wo C eine Constante ist. Dann ist aber nach (a):

$$U_n = (A'-C)n + B' - \cdots$$

und dies führt auf die erste oder zweite Auflösung der Gl. (10.) (Gl. (71.) oder (72.)). Die erste ist aber eben hier nicht anwendbar, so dass nur die Möglichkeit der zweiten übrig bleibt, wie behauptet wurde. Die Vermuthung einer solchen kann sofort *bestätigt* oder *widerlegt* werden, wenn $a_1 = U_2$ mit dem Ausdruck $A''n+B''+\frac{\gamma''}{c}\frac{\varphi(n)}{n}$ für $n=2$ zusammengehalten und ihm *genau gleich* oder *nicht gleich* gefunden wird.

In allen anderen Fällen nähert sich U_n sehr schnell dem Werthe $A'n+B'$, indem der Unterschied hiervon nämlich $\frac{1}{\Theta(n)}$ wie die Gleichungen (e), (l) und (r) zeigen, den steigenden Potenzen von $\frac{A''}{A'}$ nahezu proportional, sich rasch vermindert.

Beispiel für den Ausnahmsfall.

Sei

$$a_1=8, \quad a_n=7(n+3), \quad b_n=10(n+2)(n+3), \quad n \gtreqless 2$$

daraus folgen:

$$A'=5, \quad A''=2, \quad c=3, \quad B'=10, \quad B''=4, \quad \gamma'=0, \quad \gamma''=0.$$

Setzen wir nach (a)

$$U_2=a_1=8=10+10+\frac{1}{\Theta(2)},$$

so folgt $\Theta(2)=-\frac{1}{12}$ also $\Theta_1(2)=\frac{1}{12}$ und nach (f):

$$\Theta_1(n+1) = \frac{5(n+2)\Theta_1(n)-1}{2(n+3)}.$$

Dieser Gleichung, sowie gleichzeitig dem Anfangswerthe $\Theta_1(2)$ wird, wie leicht erweislich, durch die Function:

$$\Theta_1(n) = \frac{1}{3n+6}$$

genügt, aus (g) folgt aber

$$\overset{n}{\Theta} = \frac{1}{3n+4},$$

also bleibt immer $\Theta_1(n)$ unterhalb $\overset{n}{\Theta}$, ohne negativ zu werden; und in der That genügt der Gleichung

$$U_n(U_{n+1}-a_n)+b_n = 0 \tag{10.}$$

sowie dem Anfangswerthe $U_2 = 8$ der Ausdruck

$$U_n=A''n+B''=2n+4.$$

Untersuchung und asymptotische Darstellung der Integrale gewisser linearer Differentialgleichungen bei grossen reellen Werthen des Arguments.

(Dritter Aufsatz.)

(Von Herrn *Adolf Kneser* in Dorpat.)

Die Resultate der §§ 3 bis 6 meines im CXVII. Bande dieses Journals veröffentlichten Aufsatzes, des zweiten unter obiger Ueberschrift, können, ohne dass die Untersuchungsmethode wesentlich geändert zu werden braucht, bedeutend verallgemeinert werden; dadurch kommen meine Untersuchungen über lineare Differentialgleichungen zu einem gewissen Abschluss.

§ 1.

Annähernde Darstellung der Integrale gewisser Differentialgleichungen.

Wie früher seien alle eingeführten Grössen und Functionen reell, und lim bedeute den Grenzübergang $x = +\infty$.

Setze ich, unter a und a_1 Constante verstehend,

$$f(x) = a^2 + \frac{1}{x}(a_1 + \varphi(x)),$$

und können der positive echte Bruch γ und die positiven Constanten g, g_1 so bestimmt werden, dass, sobald $x > g$, die Ungleichungen

$$|x^\gamma \varphi'(x)| < g_1, \quad |\varphi(x)| < g_1$$

bestehen, das Integral

$$(1.) \qquad \int_x^{+\infty} \frac{\varphi(x)}{x} dx$$

eine endliche, bestimmte Grösse ist, und die Functionen $\varphi(x)$, $\varphi'(x)$ stetig sind, so liegt die Grösse $|x^{1+\gamma} f'(x)|$ unterhalb einer festen Grenze, sobald $x > g$, und das im § 2 des citirten Aufsatzes ausgesprochene Theorem lehrt, dass auch die Integrale der Differentialgleichung

$$(2.) \qquad y'' + y f(x) = 0$$

ebenso wie ihre Ableitungen für grosse Werthe von x zwischen endlichen

Grenzen verbleiben. Zwei linear unabhängige Integrale seien Y_1 und Y_2; dieselben seien, was offenbar möglich ist, so bestimmt, dass die Identität $Y_1 Y_2' - Y_2 Y_1' = 1$ besteht. Setze ich weiter

$$X = ax + \varrho \lg x, \qquad y = z + \cos X$$

indem die Bestimmung der Constanten ϱ vorbehalten bleibt, so nimmt die Gleichung (2.) folgende Gestalt an:

$$(3.)\quad z'' + zf(x) = -\frac{\varrho \sin X}{x^2} + \left(\frac{2a\varrho - a_1}{x} + \frac{\varrho^2}{x^2} - \frac{\varphi(x)}{x}\right)\cos X = \Theta(x).$$

Der absolute Betrag der rechten Seite dieser Gleichung kann bis zur oberen Grenze $+\infty$ integrirt werden, wenn wir annehmen

$$\varrho = \frac{a_1}{2a};$$

denn in dem Ausdrucke

$$\int_x^{+\infty} \Theta(x)\,dx = \int_x^{+\infty} \frac{\varrho^2 \cos X - \varrho \sin X}{x^2}\,dx - \int_x^{+\infty} \frac{\varphi(x)}{x} \cos X\,dx$$

ist das erste Glied offenbar, das zweite nach der für das Integral (1) eingeführten Voraussetzung absolut convergent, sobald $x > g$. Dasselbe gilt bei den angegebenen Eigenschaften der Functionen Y von den Integralen

$$\int_x^{+\infty} Y_1 \Theta(x)\,dx, \qquad \int_x^{+\infty} Y_2 \Theta(x)\,dx.$$

Das allgemeine Integral der Gleichung (3.) hat nun folgende Form, in welcher b und C Constante sind, und $b > g$ sei:

$$z = C_1 Y_1 + C_2 Y_2 - Y_1 \int_{b_1}^{x} Y_2 \Theta(x)\,dx + Y_2 \int_{b_2}^{x} Y_1 \Theta(x)\,dx;$$

setzt man daher für C_1 und C_2 die nach dem Obigen endlichen Werthe

$$C_1 = \int_{b_1}^{+\infty} Y_2 \Theta(x)\,dx, \qquad C_2 = -\int_{b_2}^{+\infty} Y_1 \Theta(x)\,dx,$$

so erhält man ein particuläres Integral

$$z = Y_1 \int_x^{+\infty} Y_2 \Theta(x)\,dx - Y_2 \int_x^{+\infty} Y_1 \Theta(x)\,dx,$$

für welches die Gleichung

$$\lim z = 0$$

besteht. Da ferner offenbar

$$\lim \Theta(x) = 0,$$

und die Grössen Y' ebenso wie Y für grosse Werthe von x unter endlichen Grenzen verbleiben, so folgt

$$\lim z' = 0.$$

Analoge Entwickelungen gelten offenbar, wenn man von der Annahme

$$y = \sin X + x$$

ausgeht; es ist damit folgender Satz bewiesen.

Giebt es derartige positive Constante γ, g, g_1, deren erste ein echter Bruch ist, dass für $x > g$ die reelle Function $\varphi(x)$ nebst ihrer Ableitung stetig ist, die Ungleichungen

$$|x^\gamma \varphi'(x)| < g_1, \qquad |\varphi(x)| < g_1$$

bestehen, und

$$\int_x^{+\infty} \frac{|\varphi(x)|}{x} dx$$

endlich und bestimmt ist; sind ferner a und a_1 reelle Constante und a von Null verschieden, so kann das allgemeine reelle Integral der Differentialgleichung

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + y\left(a^2 + \frac{1}{x}(a_1 + \varphi(x))\right) = 0$$

in folgender Form dargestellt werden:

$$y = C_1 \cos\left(\frac{a_1}{2a} \lg x + ax\right) + C_2 \sin\left(\frac{a_1}{2a} \lg x + ax\right) + \varepsilon;$$

dabei sind C_1 und C_2 Constante und es ist

$$\lim_{x=+\infty} \varepsilon = \lim_{x=+\infty} \frac{d\varepsilon}{dx} = 0.$$

Als unmittelbare Folgerungen ergeben sich die Gleichungen

$$C_1 = \lim\left(y \cos X - \frac{y'}{a} \sin X\right),$$

$$C_2 = \lim\left(y \sin X + \frac{y'}{a} \cos X\right),$$

sodass die rechts stehenden Grenzwerthe, wenn y irgend ein particuläres Integral bedeutet, immer endlich und bestimmt sind.

§ 2.

Integration durch semiconvergente Potenzreihen.

Die Function $\varphi(x)$ besitzt die geforderten Eigenschaften, wenn sie eine für $x = \infty$ verschwindende Potenzreihe des Arguments $1:x$ ist; setzt

man noch $a = 1$, was die Allgemeinheit nicht wesentlich beeinträchtigt, und bezeichnet durch $a_2, a_3, \ldots$ constante Coefficienten, so geht die Gleichung (2.) in folgende speciellere über:

$$(4.)\qquad y'' + y\left(1 + \frac{a_1}{x} + \frac{a_2}{x^2} + \cdots\right) = 0.$$

Nach § 1 giebt es also zwei linear unabhängige Integrale derselben von der Form

$$(5.)\qquad Y_1 = \cos X + \varepsilon_1, \qquad Y_2 = \sin X + \varepsilon_2,$$

wobei die Gleichungen

$$\lim \varepsilon_1 = \lim \varepsilon_2 = \lim \varepsilon_1' = \lim \varepsilon_2' = 0, \qquad X = x + \frac{a_1}{2}\lg x$$

bestehen.

Die Gleichung (4.) kann nun zunächst formal durch einen Ausdruck

$$(6.)\qquad \begin{cases} y = F\cos X + G\sin X \\ = \left(\alpha_0 + \frac{\alpha_1}{x} + \frac{\alpha_2}{x^2} + \cdots\right)\cos X + \left(\beta_0 + \frac{\beta_1}{x} + \frac{\beta_2}{x^2} + \cdots\right)\sin X \end{cases}$$

befriedigt werden, in welchem α, β Constante sind. Setzt man nämlich allgemein

$$\Psi(w) = w'' + w\left(1 + \frac{a_1}{x} + \frac{a_2}{x^2} + \cdots\right),$$

so hat man für den Ausdruck (6.) die Gleichung

$$\begin{aligned} \Psi(y) = {} & F''\cos X + G''\sin X + 2\left(-F'\left(1 + \frac{a_1}{2x}\right)\sin X + G'\left(1 + \frac{a_1}{2x}\right)\cos X\right) \\ & + F\left(\frac{a_1}{2x^2}\sin X - \left(\frac{a_1}{x} + \frac{a_1^2}{4x^2}\right)\cos X\right) + G\left(\frac{a_1}{2x^2}\cos X - \left(\frac{a_1}{x} + \frac{a_1^2}{4x^2}\right)\sin X\right) \\ & + \left(F\cos X + G\sin X\right)\left(\frac{a_1}{x} + \frac{a_2}{x^2} + \cdots\right); \end{aligned}$$

die rechte Seite kann, wenn man ordnet, geschrieben werden

$$\left(\frac{A_1}{x} + \frac{A_2}{x^2} + \cdots\right)\cos X + \left(\frac{B_1}{x} + \frac{B_2}{x^2} + \cdots\right)\sin X,$$

und man erhält leicht die Formeln

$$(7.)\qquad \begin{cases} A_{n+1} = n(n-1)\alpha_{n-1} - 2n\beta_n - (n-1)a_1\beta_{n-1} - a_1\alpha_n - \frac{1}{4}a_1^2\alpha_{n-1} + \frac{1}{2}a_1\beta_{n-1} \\ \qquad\qquad + a_1\alpha_n + a_2\alpha_{n-1} + \cdots + a_{n+1}\alpha_0, \\ B_{n+1} = n(n-1)\beta_{n-1} + 2n\alpha_n + (n-1)a_1\alpha_{n-1} - a_1\beta_n - \frac{1}{4}a_1^2\beta_{n-1} + \frac{1}{2}a_1\alpha_{n-1} \\ \qquad\qquad + a_1\beta_n + a_2\beta_{n-1} + \cdots + a_{n+1}\beta_0. \end{cases}$$

Die Determinante der Coefficienten von α_n und β_n in diesen Ausdrücken ist

$$\begin{vmatrix} -a_1 & -2n \\ 2n & -a_1 \end{vmatrix} = a_1^2+4n^2;$$

man kann daher, sobald α_0 und β_0 willkürlich festgelegt sind, die Grössen α und β auf eine Weise so bestimmen, dass alle Gleichungen

$$(8.)\qquad A_n = B_n = 0, \qquad n = 1, 2, \cdots$$

bestehen, der Ausdruck (6.) also eine formelle Lösung der Gleichung (4.) darstellt.

Jetzt sei

$$y = u_n + z, \qquad u_n = \cos X \sum_{\nu=0}^{n} \frac{\alpha_\nu}{x^\nu} + \sin X \sum_{\nu=0}^{n} \frac{\beta_\nu}{x^\nu};$$

dann ergiebt sich für z die Differentialgleichung

$$\Psi(y) = \Psi(u_n+z) = \Psi(u_n) + \Psi(z) = 0,$$

oder

$$(9.)\qquad z'' + z\left(1+\frac{a_1}{x}+\frac{a_2}{x^2}+\cdots\right) = -\Psi(u_n) = W.$$

Um ihre rechte Seite näher beschreiben zu können, gehe ich davon aus, dass die Ausdrücke A_ν, B_ν, deren Index nicht grösser als $n+1$ ist, nur solche Grössen α_ν, β_ν enthalten, deren Index die Zahl n nicht übersteigt. Unterdrückt man daher in dem Ausdruck $\Psi(y)$ alle Grössen α_ν, β_ν, deren Index grösser als n ist, wodurch $\Psi(y)$ in $\Psi(u_n)$ übergeht, so bleiben die Coefficienten von x^{-1}, x^{-2}, $\cdots x^{-n-1}$ ungeändert; dagegen treten an Stelle von A_{n+2}, B_{n+2} die Ausdrücke λ_n, μ_n, welche aus jenen entstehen, indem man die mit α_{n+1} und β_{n+1} behafteten Glieder weglässt, sodass man nach (7.) und (8.) erhält:

$$(10.)\qquad \begin{cases} A_{n+2} = \lambda_n - 2(n+1)\beta_{n+1} = 0, \\ B_{n+2} = \mu_n + 2(n+1)\alpha_{n+1} = 0. \end{cases}$$

In dem Ausdrucke $\Psi(u_n)$ verschwinden also wie in $\Psi(y)$ die Potenzen von x, deren Exponent die Zahl $-n-2$ übersteigt, und wenn man durch $\mathfrak{P}$ convergente Potenzreihen des beigefügten Arguments bezeichnet, ergiebt sich

$$(11.)\quad \Psi(u_n) = -W = \left(\frac{\lambda_n}{x^{n+2}} + \frac{1}{x^{n+3}}\mathfrak{P}_1\left(\frac{1}{x}\right)\right)\cos X + \left(\frac{\mu_n}{x^{n+2}} + \frac{1}{x^{n+3}}\mathfrak{P}_2\left(\frac{1}{x}\right)\right)\sin X.$$

Aus dieser Gleichung und der Form der Ausdrücke (5.) folgt, dass die Integrale

$$\int_x^{+\infty} WY_1 dx, \qquad \int_x^{+\infty} WY_2 dx,$$

sobald x eine gewisse Grenze überschritten hat, endlich und bestimmt sind; man kann daher, ähnlich wie es in § 1 für die Gleichung (3.) geschah, ein particuläres Integral der Gleichung (9.) in folgender Form darstellen:

$$z = Y_1 \int_x^{+\infty} Y_2 W dx - Y_2 \int_x^{+\infty} Y_1 W dx.$$

Für diese Grösse kann man nun die Gleichungen

$$(12.) \qquad \lim(x^n z) = \lim(x^n z') = 0$$

nach fast genau derselben Methode beweisen, welche in § 5 meines citirten Aufsatzes für die gleichbezeichnete Grösse angewandt ist; man setzt für W, Y_1 und Y_2 ihre Ausdrücke aus den Gleichungen (11.) und (5.) ein, löst die Klammern auf und betrachtet die einzelnen Glieder, welche sich von den an der citirten Stelle auftretenden nur dadurch unterscheiden, dass unter dem trigonometrischen Functionszeichen X an Stelle von x tritt. Dieser Unterschied macht nur für die dort durch N bezeichneten Glieder eine kleine Modification des Beweises nöthig; dieselben haben jetzt die Form

$$N = \int_x^{+\infty} \frac{\sin 2X}{x^{n+2}} dx$$

und es ist zu zeigen

$$(13.) \qquad \lim(x^{n+1} N) = 0.$$

Zu diesem Zwecke gehe ich, indem ich $\bar{x} > x$ annehme, aus von der Gleichung

$$\int_x^{\bar{x}} \frac{\sin 2X}{x^{n+2}} dx = \int_x^{\bar{x}} \frac{\left(1+\frac{a_1}{2x}\right)\sin 2X}{x^{n+2}\left(1+\frac{a_1}{2x}\right)} dx.$$

Da der Nenner der rechten Seite, sobald x eine gewisse Grenze über-

schritten hat, mit x zugleich zunimmt und positiv ist, erhält man nach dem zweiten Mittelwerthsatz

$$\int_x^{\bar{x}} \frac{\sin 2X}{x^{n+2}} dx = \frac{1}{x^{n+2}\left(1+\frac{a_1}{2x}\right)} \int_x^{\xi} \left(1+\frac{a_1}{2x}\right) \sin 2X dx,$$

wobei

$$x \leqq \xi \leqq \bar{x};$$

geht daher X in Ξ über, wenn man $x = \xi$ setzt, so folgt

$$\int_x^{\bar{x}} \frac{\sin 2X}{x^{n+2}} dx = \frac{1}{2x^{n+2}\left(1+\frac{a_1}{2x}\right)} (\cos 2X - \cos 2\Xi),$$

$$\left| \int_x^{\bar{x}} \frac{\sin 2X}{x^{n+2}} dx \right| < \frac{1}{x^{n+2}\left(1+\frac{a_1}{2x}\right)},$$

womit, da $\bar{x}$ beliebig gross genommen werden kann, die Relation (13.) erwiesen ist.

Auf diese Weise ergiebt sich, wie früher,

$$z - \frac{v}{x^{n+1}} = \frac{-\mu_n(\cos X + \varepsilon_1) + \lambda_n(\sin X + \varepsilon_2)}{2(n+1)x^{n+1}},$$

wobei die Gleichungen

$$\lim v = \lim v' = 0$$

gelten; benutzt man ferner die aus den Gleichungen (10.) folgenden Werthe von λ_n und μ_n, so erhält man

$$x^{n+1} z = \alpha_{n+1} \cos X + \beta_{n+1} \sin X + \omega,$$

und es ist

$$\lim \omega = \lim \omega' = 0.$$

Damit sind auch die Gleichungen (12.) bewiesen; von ihnen aus führen die in § 6 meines citirten Aufsatzes gezogenen Schlüsse, welche ohne jede Abänderung gültig bleiben, zu folgendem Theorem.

In der Differentialgleichung

$$y'' + y f(x) = 0$$

sei $f(x)$ eine für hinreichend grosse Werthe von x convergente Potenzreihe der Form

$$f(x) = a^2 + \frac{a_1}{x} + \frac{a_2}{x^2} + \cdots,$$

die Constanten a, a_1, $a_2, \cdots$, reell, und man setze

$$X = ax + \frac{a_1}{2a} \lg x.$$

Dann kann das allgemeine reelle Integral der Differentialgleichung für grosse reelle Werthe von x asymptotisch dargestellt werden durch eine Reihe

$$R = \left(\alpha_0 + \frac{\alpha_1}{x} + \frac{\alpha_2}{x^2} + \cdots\right)\cos X + \left(\beta_0 + \frac{\beta_1}{x} + \frac{\beta_2}{x^2} + \cdots\right)\sin X,$$

welche der Differentialgleichung formal genügt und in welcher α, β Constante, α_0 und β_0 willkürlich sind; d. h. es ist für jeden ganzzahligen Werth von n

$$\lim_{x=+\infty}\left\{x^n\left(y - \sum_{\nu=0}^{n} \frac{\alpha_\nu \cos X + \beta_\nu \sin X}{x^\nu}\right)\right\} = 0.$$

Die Reihe R giebt, n-mal rein formal differentiirt, eine Reihe, durch welche $y^{(n)}$ asymptotisch dargestellt wird.

§ 3.

Allgemeine Uebersicht.

Stellt man das erhaltene Resultat mit denjenigen zusammen, welche ich im CXVI. und CXVII. Bande dieses Journals und im IL. der Mathematischen Annalen abgeleitet habe, so sind die reellen Integrale der allgemeinen Differentialgleichung

$$(14.)\qquad u'' + u'\left(b_0 + \frac{b_1}{x} + \frac{b_2}{x^2} + \cdots\right) + u\left(c_0 + \frac{c_1}{x} + \frac{c_2}{x^2} + \cdots\right) = 0,$$

in welcher die Factoren von u und u' convergente Potenzreihen mit reellen Coefficienten sind, in allen Fällen für grosse reelle Werthe von x asymptotisch dargestellt. Man führt nämlich diese Gleichung durch die Substitution

$$(15.)\qquad y = u e^{\frac{1}{2}\int\left(b_0 + \frac{b_1}{x} + \cdots\right)dx} = u e^{\frac{1}{2}b_0 x} x^{\frac{1}{2}b_1} \mathfrak{P}\left(\frac{1}{x}\right)$$

auf die binomische

$$y'' + y\left(a_0 + \frac{a_1}{x} + \frac{a_2}{x^2} + \cdots\right) = 0$$

zurück, in welcher alle Grössen a ebenfalls reelle Constante sind und speciell

$$a_0 = c_0 - \tfrac{1}{4}b_0^2, \quad a_1 = c_1 - \tfrac{1}{2}b_0 b_1.$$

Wenn nun $a_0 < 0$ und γ_ν, $\bar{\gamma}_\nu$ Constante sind, so kann man y durch eine Reihe

$$e^{x\sqrt{-a_0}}\, x^{\frac{a_1}{2\sqrt{-a_0}}}\left(\gamma_0 + \frac{\gamma_1}{x} + \frac{\gamma_2}{x^2} + \cdots\right)$$

asymptotisch darstellen; wenn $a_0 > 0$, durch die soeben definirte Reihe R, in welcher $a = \sqrt{a_0}$ zu setzen ist. Für jedes Integral der Gleichung (14.) erhält man also nach (15.) bei negativen Werthen a_0 einen Ausdruck

$$e^{hx} x^k \left(\bar{\gamma}_0 + \frac{\bar{\gamma}_1}{x} + \frac{\bar{\gamma}_2}{x^2} + \cdots\right),$$

bei positiven a_0 dagegen

$$e^{hx} x^k R$$

als asymptotische Darstellung. Dabei ist offenbar für den ersten Fall

$$h = \tfrac{1}{2} b_0 + \sqrt{-a_0}, \qquad k = \tfrac{1}{2} b_1 + \frac{a_1}{2\sqrt{-a_0}},$$

für den zweiten

$$h = \tfrac{1}{2} b_0, \qquad k = \tfrac{1}{2} b_1.$$

Soweit sich diese Resultate auf den Fall positiver Werthe a_0 beziehen, sind sie in den Sätzen enthalten, welche *Horn* im CXVIII. Bande dieses Journals für Gleichungen (14.) mit complexen Coefficienten b, c aufgestellt hat; aus letzteren sind aber diejenigen meiner Sätze, welche $a_0 < 0$ voraussetzen, nicht abzuleiten.

Ist ferner $a_0 = 0$, a_1 von Null verschieden, so kommt man auf einen der behandelten Fälle zurück, wenn man $\sqrt{x}$ als Argument einführt. Ist endlich $a_0 = a_1 = 0$, so ist $x = \infty$ für die Gleichung (14.) eine Stelle der Bestimmtheit, für deren Umgebung die Theorie von *Fuchs* alle Integrale in bekannter Weise darstellen lehrt.

Preisaufgabe der Fürstlich *Jablonowski*schen Gesellschaft für das Jahr 1902.

Dass die von *C. Neumann* seit 1870 angewandte Methode des arithmetischen Mittels einen sehr hohen Grad von Allgemeinheit besitze, dafür sprechen sowohl die mannichfaltigen Arbeiten *Neumanns* (Abh. der K. S. Ges. der Wiss. XIII, S. 707), wie auch die tiefgehenden Betrachtungen *Poincarés* (Acta math. XX, p. 59). Gleichzeitig aber geht aus der Gesammtheit dieser Untersuchungen hervor, dass noch manche schwierige Punkte der weiteren Aufklärung bedürftig sind. Es erscheint daher wichtig, wenigstens die erforderlichen Vorarbeiten zu unternehmen, um von den eigentlichen Grundzügen dieses Gebietes eine völlig klare Vorstellung zu gewinnen, und namentlich die genannte *Poincaré*sche Abhandlung in ihrer ganzen Tragweite zu verwerthen, vielleicht deren Resultate weiter zu verallgemeinern. Vor allem aber entsteht die Aufgabe, den *Poincaré*schen Darlegungen eine grössere Einfachheit und Durchsichtigkeit, und womöglich auch einen höheren Grad von Strenge zu verleihen.

Ohne unter den hier angedeuteten Richtungen eine vor der andern besonders bevorzugen zu wollen, spricht die Gesellchaft den Wunsch aus,

> dass die in der Abhandlung von ***Poincaré*** „La méthode de ***Neumann*** et le problème de ***Dirichlet***" 1896, enthaltenen Untersuchungen nach irgend welcher Seite hin wesentlich vervollkommnet werden möchten.

Preis 1000 Mark.

Die anonym einzureichenden Bewerbungsschriften sind, wo nicht die Gesellschaft im besonderen Falle ausdrücklich den Gebrauch einer andern Sprache gestattet, in deutscher, lateinischer oder französischer Sprache zu verfassen, müssen einseitig geschrieben und paginirt, ferner mit einem Motto versehen und von einem versiegelten Umschlage begleitet sein, welcher auf der Aussenseite das Motto der Arbeit trägt, inwendig den Namen und Wohnort des Verfassers angiebt. Jede Bewerbungsschrift muss auf dem Titelblatte die Angabe einer Adresse enthalten, an welche die Arbeit für den Fall, dass sie nicht preiswürdig befunden wird, zurückzusenden ist. Die Zeit der Einsendung endet mit dem 30. November des angegebenen Jahres, und die Zusendung ist an den derz. Sekretär der Gesellschaft (für das Jahr 1899 Professor Dr. ***Eduard Sievers***, Leipzig-Gohlis, Turnerstrasse 26) zu richten. Die Resultate der Prüfung der eingegangenen Schriften werden durch die Leipziger Zeitung im März oder April des folgenden Jahres bekannt gemacht. Die gekrönten Bewerbungsschriften werden Eigenthum der Gesellschaft.

Zur *Poisson*schen Theorie der Elektrostatik, insbesondere über die elektrische Vertheilung auf einem von drei Kugelflächen begrenzten Conductor.

(Von Herrn *Ernst Neumann* in Halle.)

Schluss der Abhandlung Band 120, Seite 60—98.

---

§ 5. Die elektrische Vertheilung auf einem Conductor K, der begrenzt wird von Theilen dreier Kugelflächen, deren eine die beiden anderen orthogonal schneidet.

Wir nehmen eine Elektricitätsmenge M im Raume beliebig vertheilt an. Ihr Potential sei Ω, und es sei σ eine Fläche constanten Potentials, eine Niveaufläche ($\Omega = C$), welche alle elektrischen Massentheile umschliesst. Denken wir uns alsdann diese Fläche σ als die Oberfläche eines Conductors, und sodann diesen Conductor elektrisch geladen bis zu dem Potentialwerthe C, so wird das Potential V, der nach Eintritt des Gleichgewichtszustandes vorhandenen elektrischen Oberflächenbelegung im ganzen äusseren Raume identisch mit dem Potentiale Ω sein*). Daraus folgt dann nach einem bekannten Satze der Potentialtheorie, dass die Gesammtmasse der Belegung, die zur Ladung erforderliche Elektricitätsmenge, ebenfalls identisch sein muss mit der ursprünglich gegebenen Elektricitätsmenge M.

Wir betrachten nun das im vorigen Paragraphen näher behandelte specielle elektrische System, oder, wie wir es kurz bezeichnen wollen, das elektrische System S. Dasselbe besitzt nach unseren obigen Ausführungen eine Niveaufläche $\left(\Omega = C = \frac{m}{\varrho}\right)$, welche gebildet wird von den beiden Conductorkugelflächen σ_1 und σ_2 und der um m gelegten Orthogonalkugelfläche σ_0. Der äussere Umriss F dieser verzweigten Niveaufläche erfüllt nun die Bedingung, dass er die sämmtlichen elektrischen Massen einschliesst;

---

*) Die Richtigkeit dieser Behauptung leuchtet wohl sofort ein; sie ergiebt sich als unmittelbare Folge des bekannten Satzes von der eindeutigen Bestimmung des Potentials durch seine Oberflächenwerthe.

auf ihn ist daher unser obiger Satz anwendbar. — Wir denken uns diesen Umriss demnach als die Oberfläche eines Conductors K, und denken uns diesen elektrisch geladen bis zu dem Potentialwerth $C=\frac{m}{\varrho}$. Die hierzu erforderliche Ladung M wird alsdann gleich der gesammten im System S enthaltenen Elektricitätsmenge, d. h. gleich $m+\mathsf{M}_1+\mathsf{M}_2$ sein, oder nach (6.) S. 96, wenn wir noch berücksichtigen, dass $m=\varrho\cdot C$ ist,

$$(1.)\qquad M = C\cdot\Big\{\varrho+2a\sum_{n=0}^{\infty}\Big(k_1^{(n)}e^{-N\lambda_1}+k_2^{(n)}e^{N\lambda_2}\Big)\cdot\Big(1-P_n(\cos\vartheta_c)\Big)\Big\}.$$

Ferner ist das Potential V dieser elektrischen Ladung M nach Eintritt des Gleichgewichtszustandes identisch mit dem Potentiale Ω des elektrischen Systems S, also zufolge (8.) S. 96

$$(2.)\quad V = C\Big\{\frac{\varrho}{r}+\psi^{\frac{1}{2}}\sum_{n=0}^{\infty}\Big(k_1^{(n)}e^{N(\lambda-\lambda_1)}+k_2^{(n)}e^{N(\lambda_2-\lambda)}\Big)\Big(P_n(\cos\vartheta)-P_n(\cos\gamma)\Big)\Big\}.$$

Die Dichtigkeit ε endlich der auf der Oberfläche von K entstehenden elektrischen Belegung steht zu diesem ihrem Potential V in einfacher Beziehung, es ist bekanntlich

$$\varepsilon=-\frac{1}{4\pi}\frac{\partial V}{\partial n}\quad\text{oder auch}\quad\varepsilon=-\frac{1}{4\pi}\frac{\partial\Omega}{\partial n},$$

denn im ganzen Aussenraume ist ja V gleich Ω. — Nun ist aber auch die Dichtigkeit η der in dem ursprünglichen Systeme S auf den Conductorkugeln vorhandenen Belegungen gleich $-\frac{1}{4\pi}\frac{\partial\Omega}{\partial n}$; daraus folgt, dass, soweit sich diese Kugelflächen mit der Oberfläche des Conductors K decken, die Dichtigkeiten ε und η übereinstimmen; es ist sonach in allen Oberflächenelementen $d\sigma_1$ und $d\sigma_2$ der beiden den Kugelflächen σ_1 und σ_2 angehörenden Calotten

$$(3.)\qquad \varepsilon_1=\eta_1,\qquad \varepsilon_2=\eta_2,$$

wo η_1 und η_2 die in (7.) S. 96 angegebenen Bedeutungen haben.

Es bleibt daher nur noch übrig, die Dichtigkeit ε_0 in einem Elemente $d\sigma_0$ (λ_0, ϑ_0, φ_0) der Orthogonalkugelfläche σ_0 wirklich auf Grund der Formel

$$(4.)\qquad \varepsilon_0 = -\frac{1}{4\pi}\frac{\partial V}{\partial n_0}$$

zu berechnen. — Nach (2.) ist nun das Potential V von der Form:

$$(5.)\qquad V = C\Big(\frac{\varrho}{r}+W(\lambda,\ \vartheta,\ \varphi)\Big).$$

Da aber die Richtung der Normalen n_0 mit der der Radiivectoren r zusammenfällt, so ist

$$\frac{\partial}{\partial n_0}\left(\frac{\varrho}{r}\right)=\left(\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\varrho}{r}\right)\right)_{r=\varrho}=-\frac{1}{\varrho}$$

und mithin nach (4.) und (5.):

$$(6.)\qquad \varepsilon_0 = \frac{C}{4\pi}\left(\frac{1}{\varrho}-\frac{\partial W}{\partial n_0}\right),$$

wo W als Abkürzung in der folgenden Bedeutung steht:

$$(7.)\quad \begin{cases} W(\lambda, \vartheta, \varphi)=\sum_{n=0}^{\infty}(\psi^{\frac{1}{2}}F_n(\lambda))\cdot\big(P_n(\cos\vartheta)-P_n(\cos\gamma)\big), \\ F_n(\lambda)=k_1^{(n)}e^{N(\lambda-\lambda_1)}+k_2^{(n)}e^{N(\lambda_2-\lambda)}. \end{cases}$$

Bilden wir nun, um

$$(8.)\qquad \frac{\partial W}{\partial n_0}=\frac{\partial W}{\partial \lambda}\cdot\frac{\partial \lambda}{\partial n_0}+\frac{\partial W}{\partial \vartheta}\cdot\frac{\partial \vartheta}{\partial n_0}+\frac{\partial W}{\partial \varphi}\cdot\frac{\partial \varphi}{\partial n_0}$$

zu berechnen, die Ausdrücke $\frac{\partial W}{\partial \lambda}$, $\frac{\partial W}{\partial \vartheta}$, $\frac{\partial W}{\partial \varphi}$, natürlich speciell für Punkte, der Orthogonalkugelfläche σ_0 $(\cos\vartheta=\cos\gamma)$, wie wir das hinfort durch den unteren Index 0 andeuten wollen, so fallen die Terme, welche von der Differentiation der ersten Factoren der Productsumme (7.) herrühren, sämmtlich fort, denn diese Glieder enthalten die Factoren $P_n(\cos\vartheta)-P_n(\cos\gamma)$. Es folgt demnach

$$(9.)\qquad \begin{cases} \left(\frac{\partial W}{\partial \lambda}\right)_0 = 0, \\ \left(\frac{\partial W}{\partial \vartheta}\right)_0 = \sum_{n=0}^{\infty}(\psi^{\frac{1}{2}}\cdot F_n(\lambda))_0\cdot P_n'(\cos\vartheta_0)\cdot\left(\frac{\partial(\cos\vartheta)}{\partial\vartheta}-\frac{\partial(\cos\gamma)}{\partial\vartheta}\right)_0, \\ \left(\frac{\partial W}{\partial \varphi}\right)_0 = \sum_{n=0}^{\infty}(\psi^{\frac{1}{2}}\cdot F_n(\lambda))_0\cdot(P_n'(\cos\vartheta_0)\left(-\frac{\partial(\cos\gamma)}{\partial\varphi}\right)_0. \end{cases}$$

Wir erhalten daher nach (8.),

$$(10.)\qquad \frac{\partial W}{\partial n_0} = \Pi_0\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\left(\psi^{\frac{1}{2}}F_n(\lambda)\right)_0 P_n'(\cos\vartheta_0),$$

wo

$$\Pi_0 = \left\{\left(\frac{\partial(\cos\vartheta)}{\partial\vartheta}-\frac{\partial(\cos\gamma)}{\partial\vartheta}\right)\frac{\partial\vartheta}{\partial n}-\frac{\partial(\cos\gamma)}{\partial\varphi}\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right\}_0$$

ist. Es handelt sich also jetzt nur noch darum, diese Function Π_0 zu berechnen. Zu diesem Zweck führen wir wieder (vgl. (4'.) S. 72) neben

$$\psi = e^{\lambda}+e^{-\lambda}-2\cos\vartheta \qquad \text{die Grösse} \qquad \chi = e^{\lambda}+e^{-\lambda}-2\cos\gamma$$

ein. Dann können wir Π_0 folgendermassen darstellen:

$$\Pi_0 = \tfrac{1}{2}\left\{\left(\frac{\partial\chi}{\partial\vartheta}-\frac{\partial\psi}{\partial\vartheta}\right)\frac{\partial\vartheta}{\partial n}+\frac{\partial\chi}{\partial\varphi}\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right\}_0,$$

und da nach (11.) und (14.) S. 73–74

$$\frac{\partial\varphi}{\partial n} = -f_0\frac{\partial\vartheta}{\partial n} \quad\text{und}\quad \frac{\partial\vartheta}{\partial n} = \frac{2\psi_0}{\varrho}\cdot\frac{1}{\left\{\left(\frac{\partial\chi}{\partial\vartheta}-\frac{\partial\psi}{\partial\vartheta}\right)-f\frac{\partial\chi}{\partial\varphi}\right\}_0}$$

ist, so folgt hieraus sofort:

$$\Pi_0 = \tfrac{1}{2}\left\{\left(\frac{\partial\chi}{\partial\vartheta}-\frac{\partial\psi}{\partial\vartheta}\right)-f\frac{\partial\chi}{\partial\varphi}\right\}_0\cdot\frac{\partial\vartheta}{\partial n} = \frac{\psi_0}{\varrho}.$$

Damit ist unsere Aufgabe gelöst. Wir brauchen nur noch diesen Werth von Π_0 in den Ausdruck (10.) für $\frac{\partial W}{\partial n_0}$ und diesen dann seinerseits in die Formel (6.) zu substituiren, um auch ε_0 zu erhalten, d. h. die gesuchte Dichtigkeit der auf dem Conductor K zur Zeit des Gleichgewichtszustandes vorhandenen Belegung in Punkten der Orthogonalkugelfläche σ_0.

Wir können dieses Resultat mit den früher abgeleiteten, in den Formeln (1.), (2.) und (3.) enthaltenen Resultaten folgendermassen zusammenfassen:

Lösung des ersten elektrostatischen Fundamentalproblems für den Conductor K. — *Es seien gegeben drei Kugelflächen, deren eine σ_0 die beiden anderen σ_1 und σ_2 orthogonal schneidet. Die beiden letzteren mögen einem dipolaren System (Poldistanz $2a$) als λ-Kugelflächen mit den Parametern λ_1 und λ_2 ($\lambda_1 > 0 > \lambda_2$) angehören, während das Centrum c der Orthogonalkugelfläche σ_0 (Radius ϱ) in diesem dipolaren System die Coordinaten ϑ_c, φ_c besitze (λ_c ist $= 0$).*

Um alsdann einen von diesen drei Kugelflächen, oder vielmehr von gewissen Theilen derselben begrenzten isolirten Conductor K elektrisch bis zur Spannung C zu laden, ist die folgende Elektricitätsmenge M erforderlich:

$$(11.)\quad M = C\left\{\varrho + 2a\sum_{n=0}^{\infty}\left(k_1^{(n)}e^{-N\lambda_1}+k_2^{(n)}e^{N\lambda_2}\right)\left(1-P_n(\cos\vartheta_c)\right)\right\}.$$

Ferner werden die Dichtigkeiten der Oberflächenbelegung, als welche sich diese

Ladung vertheilt, in den Elementen $d\sigma_0$, $d\sigma_1$ und $d\sigma_2$ jener drei Kugelflächen die Werthe haben:

$$
(12.)\quad \begin{cases} \varepsilon_0 = \dfrac{C}{4\pi\varrho}\Big\{1-\psi_0^{\frac{3}{2}}\cdot\sum\limits_{n=0}^{\infty}\big(k_1^{(n)}e^{N(\lambda_0-\lambda_1)}+k_2^{(n)}e^{N(\lambda_2-\lambda_0)}\big)P_n'(\cos\vartheta_0)\Big\}, \\ \varepsilon_1 = \dfrac{C}{4\pi a}\psi_1^{\frac{3}{2}}\sum\limits_{n=0}^{\infty}Nk_1^{(n)}\big(P_n(\cos\vartheta_1)-P_n(\cos\gamma_1)\big), \\ \varepsilon_2 = \dfrac{C}{4\pi a}\psi_2^{\frac{3}{2}}\sum\limits_{n=0}^{\infty}Nk_2^{(n)}\big(P_n(\cos\vartheta_2)-P_n(\cos\gamma_2)\big) \end{cases}
$$

und endlich wird das Potential dieser Belegung in einem äusseren Punkte $\lambda, \vartheta, \varphi;\ \psi$ lauten

$$
(13.)\quad V = C\left\{\frac{\varrho}{r}+\psi^{\frac{1}{2}}\sum_{n=0}^{\infty}\Big(k_1^{(n)}e^{N(\lambda-\lambda_1)}+k_2^{(n)}e^{N(\lambda_2-\lambda)}\Big)\cdot\Big(P_n(\cos\vartheta)-P_n(\cos\gamma)\Big)\right\}.
$$

Hier stehen $\lambda, \vartheta, \varphi$ mit den entsprechenden Indices für die Coordinaten der Elemente $d\sigma_0$, $d\sigma_1$ und $d\sigma_2$, und ferner N für $n+\frac{1}{2}$ und $\cos\gamma$ *für* $\cos\vartheta\cdot\cos\vartheta_c+\sin\vartheta\cdot\sin\vartheta_c\cos(\varphi-\varphi_c)$. *Sodann bedeutet r den Abstand des betrachteten Punktes von c und endlich haben die Coefficienten $k^{(n)}$ die in* (4.) S. 94 *angegebenen Bedeutungen.*

Wie steht es nun mit der Dichtigkeit der Belegung speciell in den Kreisen, in denen sich zwei jener Kugelflächen schneiden, z. B. in dem Schnittkreise von σ_0 und σ_1, in dessen Punkten also $\lambda_1 = \lambda_0$ und gleichzeitig $\cos\vartheta_1 = \cos\gamma_1 = \cos\vartheta_0$ ist? — Nach der Formel (12.) folgt hieraus sofort $\varepsilon_1 = 0$. Doch wie steht es mit ε_0? — Eine einfache Rechnung ergiebt

$$
[k_1^{(n)}e^{N(\lambda_0-\lambda_1)}+k_2^{(n)}e^{N(\lambda_2-\lambda_0)}]_{\lambda_1=\lambda_0} = e^{-N\lambda_0}, \quad \text{also} \quad \varepsilon_0 = \frac{C}{4\pi\varrho}\Big\{1-\psi_0^{\frac{3}{2}}\sum_{n=0}^{\infty}e^{-N\lambda_0}P_n'(\cos\vartheta_0)\Big\}.
$$

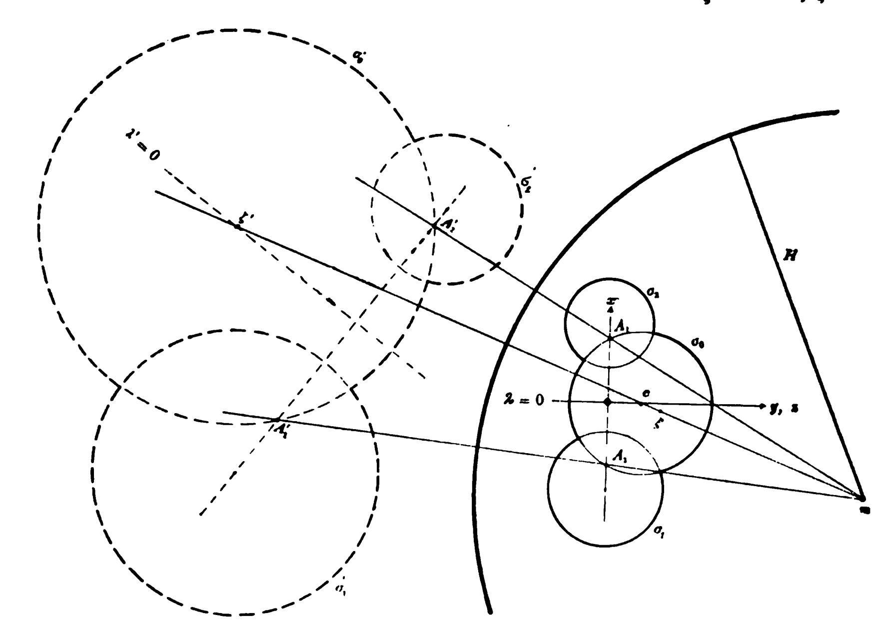
Diese hier auftretende unendliche Summe hat nun den Werth $\psi^{-\frac{3}{2}}$, wie man leicht durch Differentiation der Formel (11.) S. 65 nach $\cos\vartheta$ erkennt; es folgt somit auch $\varepsilon_0 = 0$, oder das Resultat: *Wie wir uns auch einem Schnittkreise zweier von jenen drei Kugelflächen nähern, ob auf der einen oder auf der anderen, immer wird die Dichtigkeit der Belegung (absolut genommen) abnehmen, um schliesslich den Werth* 0 *anzunehmen.*

§ 6. Fortsetzung. Das zweite Fundamentproblem für jenen Conductor K.

Um nun auch die auf abgeleitetem Conductor K durch einen äusseren elektrischen Massenpunkt inducirte elektrische Vertheilung zu bestimmen, oder kurz gesagt, um auch das zweite Fundamentalproblem für den Con-

ductor K zu lösen, bemerken wir, dass die Conductoroberfläche F die Eigenschaft besitzt, durch Abbildung nach reciproken Radien in eine Fläche von dem gleichen Typus überzugehen. Wir können daher nach den allgemeinen Regeln des § 1 die Lösung dieses zweiten Problems zurückführen auf die uns schon bekannte Lösung des ersten Fundamentalproblems, ähnlich wie das in § 3 an einem anderen einfachen Beispiel näher erläutert wurde.

Wir verfahren folgendermassen: Wir bilden die Oberfläche F des Conductors K von dem Massenpunkte m $(\lambda_m, \vartheta_m, \varphi_m)$ aus, dessen Entfernung von dem Centrum C der Orthogonalkugel gleich E sei, an einer Kugelfläche vom Radius H nach reciproken Radien ab. Die auf diese Weise erhaltene Fläche denken wir uns als die Oberfläche eines Conductors K'. Derselbe wird dann wieder begrenzt von drei Kugelflächen, deren eine σ_0' die beiden anderen σ_1' und σ_2' orthogonal schneidet. Die beiden letzteren gehören einem dipolaren Coordinatensystem (Bildsystem) als λ-Kugelflächen mit den Parametern $\lambda_1-\lambda_m$ und $\lambda_2-\lambda_m$ an, während das Centrum der Orthogonalkugel σ_0', das wir mit ζ' bezeichnen, in diesem System die λ-Coordinate $\lambda'_{\zeta'} = 0$ besitzt. Seine beiden anderen Coordinaten bezeichnen wir mit $\vartheta'_{\zeta'}$ und $\varphi'_{\zeta'}$.



Wir können uns diesen Conductor K' nun bis zum Potentialwerthe $-\frac{m}{H}$ elektrisch geladen denken und dann nach den Ausführungen des vorigen Paragraphen die entstehende elektrische Vertheilung, sowie ihr Potential

bestimmen, und können dann, ausgehend von diesen Resultaten, nach den Formeln (4.), (5.) und (6.) S. 85 die Dichtigkeit ε', das Potential V' und die Gesammtmasse M' der durch m in dem zur Erde abgeleiteten Conductor K inducirten Vertheilung berechnen. Die dabei anzuwendende Methode ist völlig analog der des § 3. — Auf alle Einzelheiten der Ausführung brauchen wir daher nicht einzugehen. Nur einige Punkte, welche Schwierigkeiten verursachen könnten, seien etwas ausführlicher behandelt.

Wenn wir das erste Fundamentalproblem für den Bildconductor K' lösen und mit Rücksicht auf (6.) S. 85 speciell den Potentialwerth im Abbildungscentrum bestimmen wollen, so treten dabei, wie aus (12.) und (13.) S. 281 ersichtlich, u. a. die folgenden Grössen auf:

$$(1.)\qquad \varrho',\quad E',\quad \cos\gamma'_{\zeta,m}\quad \text{und}\quad \cos\gamma'_{\zeta,\alpha'},$$

deren erstere den Radius der Kugelfläche σ'_0 und den Abstand ihres Centrums ζ' vom Abbildungscentrum m bedeuten, wohingegen $\gamma'_{\zeta',m}$ und $\gamma'_{\zeta,\alpha'}$ die Winkel sind, welche gewisse ϑ-Bogen des dipolaren Bildsystems mit einander bilden, nämlich der durch ζ' hindurchgehende mit dem des Punktes m, bezw. mit dem eines *beliebigen* Punktes α'.

Alle diese Grössen (1.) beziehen sich also auf den Bildconductor, auf das dipolare Bildsystem. Dies waren aber nur auxiliare Dinge, nur Mittel zum Zweck, wir werden also diese Grössen (1.) durch die ursprünglich gegebenen Grössen auszudrücken suchen müssen.

Was nun ϱ' und E' anlangt, so folgt aus ganz elementaren Betrachtungen

$$(2.)\qquad \varrho' = H^2\frac{\varrho}{E^2-\varrho^2}\quad \text{und}\quad \frac{\varrho'}{E'} = \frac{\varrho}{E}.$$

Diese letztere Gleichung erheben wir nun ins Quadrat und drücken sie in dipolaren Coordinaten aus. Dann folgt

$$\frac{\psi''_m}{e^{\lambda''_m}+e^{-\lambda''_m}-2\cos\gamma'_{\zeta,m}} = \frac{\psi_m}{e^{\lambda_m}+e^{-\lambda_m}-2\cos\lambda_{c,m}},$$

wenn λ''_m und ψ''_m die Coordinaten des Abbildungscentrums m im Bildsystem bedeuten. Nun ist aber nach dem Hülfssatz S. 79 $\lambda''_m = -\lambda_m$ und $\psi''_m = \psi_m$, also folgt aus der letzten Gleichung

$$(3.)\qquad \cos\gamma'_{\zeta,m} = \cos\gamma_{c,m},$$

womit auch $\cos\gamma'_{\zeta,m}$ auf das ursprüngliche System transformirt ist.

Weniger leicht ist diese Transformation bei der letzten der Grössen (1.), bei $\cos\gamma'_{\zeta',a'}$, zu bewerkstelligen. — Wir führen zunächst die zu ζ' und a' conjugirten Punkte ζ und a ein. Dann ist augenscheinlich wegen der Winkeltreue der Abbildung

$$(4.)\qquad \cos\gamma'_{\zeta',a'} = \cos\gamma_{\zeta,a} \equiv \cos\vartheta_a\cos\vartheta_\zeta + \sin\vartheta_a\sin\vartheta_\zeta\cos(\varphi_a-\varphi_\zeta) \equiv \cos\nu_a.$$

Diesen Ausdruck müssen wir jedoch noch weiter umformen, denn ϑ_ζ und φ_ζ sind noch unbekannt, der Punkt ζ war nicht von Hause aus gegeben, er ist lediglich definirt als der zu ζ' conjugirte Punkt. Nun hatte aber ζ' im dipolaren Bildsystem als Centrum der Orthogonalkugelfläche σ'_0 die λ-Coordinate $\lambda'_{\zeta'} = 0$, und es folgt daher zunächst aus der allgemeinen Beziehungsgleichung $\lambda' = \lambda - \lambda_m$ zwischen den λ-Coordinaten conjugirter Punkte

$$(5.)\qquad \lambda_\zeta = \lambda_m.$$

Sodann liegen augenscheinlich die drei Punkte c, ζ und m auf einer Geraden, es werden also zwischen ihren rechtwinkligen Coordinaten die Beziehungen bestehen:

$$(6.)\qquad x_\zeta - x_c = q(x_m - x), \qquad y_\zeta - y_c = q(y_m - y_c), \qquad z_\zeta - z_c = q(z_m - z_c),$$

wo q einen blossen Proportionalitätsfactor bedeutet. — Für diesen Factor folgt nun aus der ersten der Gleichungen, da $x_c = 0$ ist, nach (4.) S. 65 der Werth

$$q = \frac{x_\zeta}{x_m} = \frac{e^{-\lambda_\zeta} - e^{+\lambda_\zeta}}{e^{-\lambda_m} - e^{+\lambda_m}}\cdot\frac{\psi_m}{\psi_\zeta}, \qquad \text{d. i. nach (5.)} \qquad q = \frac{\psi_m}{\psi_\zeta}.$$

Setzen wir diesen Werth von q in die beiden letzten Gleichungen (6.) ein, und setzen ferner daselbst für die rechtwinkligen Coordinaten ihre Ausdrücke in dipolaren Coordinaten (vgl. (4.) S. 65), so erhalten wir die beiden folgenden Gleichungen

$$\frac{\sin\vartheta_\zeta\cdot\cos\varphi_\zeta}{\psi_\zeta} - \frac{\sin\vartheta_c\cos\varphi_c}{\psi_c} = \frac{\psi_m}{\psi_\zeta}\left(\frac{\sin\vartheta_m\cos\varphi_m}{\psi_m} - \frac{\sin\vartheta_c\cos\varphi_c}{\psi_c}\right),$$

$$\frac{\sin\vartheta_\zeta\sin\varphi_\zeta}{\psi_\zeta} - \frac{\sin\vartheta_c\sin\varphi_c}{\psi_c} = \frac{\psi_m}{\psi_\zeta}\left(\frac{\sin\vartheta_m\sin\varphi_m}{\psi_m} - \frac{\sin\vartheta_c\sin\varphi_c}{\psi_c}\right)$$

oder wir erhalten, wenn wir mit $\psi_\zeta\cdot\sin\vartheta_a\cos\varphi_a$, bezw. $\psi_\zeta\sin\vartheta_a\sin\varphi_a$ multipliciren und alsdann addiren:

$$\sin\vartheta_a\sin\vartheta_\zeta\cos(\varphi_a-\varphi_\zeta) = \sin\vartheta_a\sin\vartheta_m\cos(\varphi_a-\varphi_m) + \frac{\psi_\zeta-\psi_m}{\psi_c}\sin\vartheta_a\sin\vartheta_c\cos(\varphi_a-\varphi_c)$$

oder, was dasselbe ist (vgl. (4.)):

$$\cos\nu_a - \cos\vartheta_a\cos\vartheta_\zeta = (\cos\gamma_{a,m} - \cos\vartheta_a\cdot\cos\vartheta_m) + \frac{\psi_\zeta-\psi_m}{\psi}(\cos\gamma_{a,c} - \cos\vartheta_a\cos\vartheta_c),$$

und hieraus folgt leicht mit Rücksicht auf (5.), sowie auf den Werth $\lambda_c = 0$:

$$(7.)\qquad \cos\nu_a = \cos\gamma_{a,m} - \frac{\cos\vartheta_\zeta - \cos\vartheta_m}{1-\cos\vartheta_c}(\cos\gamma_{a,c} - \cos\vartheta_a).$$

Hier ist nur noch $\cos\vartheta_\zeta$ unbekannt, doch da wir das ursprüngliche dipolare System auch als das Bildsystem unseres zweiten Systems (des bisherigen Bildsystems) ansehen können, so folgt sofort

$$\cos\vartheta_\zeta = \cos\gamma'_{\zeta,m} \quad \text{d. i. nach (3.)} \quad \cos\vartheta_\zeta = \cos\gamma_{c,m}.$$

Wir haben mithin auch $\cos\vartheta_\zeta$ und damit nach (7.) auch $\cos\nu_a$ durch lauter gegebene Grössen ausgedrückt. Es sind demnach jetzt die sämmtlichen Grössen (1.) auf das ursprünglich gegebene Coordinatensystem transformirt, denn $\cos\nu_a$ ist eben nach (4.) nichts anderes als $\cos\gamma'_{\zeta,a}$.

Damit sind jetzt alle rechnerischen Schwierigkeiten überwunden, es ergiebt sich auf dem S. 85 angegebenen Wege die folgende

Lösung des zweiten elektrostatischen Fundamentalproblems für den Conductor K. — *Der oben* (S. 280) *näher bestimmte Conductor K sei zur Erde abgeleitet. Auf ihn wirke von aussen her ein fester elektrischer Massenpunkt m ein, der in dem benutzten dipolaren System die Coordinaten λ_m, ϑ_m, φ_m besitze, und dessen Entfernung von dem Kugelcentrum c wir mit E bezeichnen wollen. — Alsdann wird durch diesen Massenpunkt in dem Conductor K die Elektricitätsmenge*

$$(9.)\quad M' = -m\left\{\frac{\varrho}{E} + \psi_m^{\frac{1}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\varkappa_1^{(n)} e^{-N\lambda_1} + \varkappa_2^{(n)} e^{N\lambda_2}\right)\cdot\left(P_n(\cos\vartheta_m) - P_n(\cos\gamma_{c,m})\right)\right\}$$

inducirt werden, und zwar in Form einer Oberflächenbelegung, deren Dichtigkeit in Elementen $d\sigma_0$, $d\sigma_1$ und $d\sigma_2$ der drei begrenzenden Kugelflächen die folgenden Werthe besitzt:

$$(10.)\quad \begin{cases} \varepsilon'_0 = -m\dfrac{E^2-\varrho^2}{4\pi\varrho}\left\{\dfrac{1}{r_0^3} - \dfrac{\psi_m^{\frac{3}{2}}}{8a^3}\psi_0^{\frac{3}{2}} \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\left(\varkappa_1^{(n)} e^{N(\lambda_0-\lambda_1)} + \varkappa_2^{(n)} e^{N(\lambda_2-\lambda_0)}\right) P'_n(\cos\gamma_{0,m})\right\}, \\ \varepsilon'_1 = -m\dfrac{\psi_m^{\frac{1}{2}}}{8\pi a^2}\psi_1^{\frac{3}{2}} \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} N\varkappa_1^{(n)}\left(P_n(\cos\gamma_{1,m}) - P_n(\cos\nu_1)\right), \\ \varepsilon'_2 = -m\dfrac{\psi_m^{\frac{1}{2}}}{8\pi a^2}\psi_2^{\frac{3}{2}} \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} N\varkappa_2^{(n)}\left(P_n(\cos\gamma_{2,m}) - P_n(\cos\nu_2)\right), \end{cases}$$

und ferner wird das Potential dieser Belegung in einem äusseren Punkte $\xi(\lambda, \vartheta, \varphi; \psi)$

$$(11.)\quad \begin{cases} V' = -m\dfrac{\psi_m^{\frac{1}{2}}}{2a}\psi^{\frac{1}{2}}\Big\{\left(e^{\lambda-\lambda_m}+e^{\lambda_m-\lambda}-2\cos\nu_\xi\right)^{-\frac{1}{2}} \\ \qquad +\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(\varkappa_1^{(n)}e^{N(\lambda-\lambda_1)}+\varkappa_2^{(n)}e^{N(\lambda_2-\lambda)}\right)\cdot\Big(P_n(\cos\gamma_{\xi,m})-P_n(\cos\nu_\xi)\Big)\Big\} \end{cases}$$

sein. — Hier bedeutet r den Abstand des betrachteten Punktes von m, ferner ist

$$\cos\gamma_{a,\beta} = \cos\vartheta_a\cdot\cos\vartheta_\beta+\sin\vartheta_a\sin\vartheta_\beta\cos(\varphi_a-\varphi_\beta),$$

$$\cos\nu_a = \cos\gamma_{a,m}-\frac{\cos\gamma_{m,c}-\cos\vartheta_m}{1-\cos\vartheta_c}\cdot(\cos\gamma_{a,c}-\cos\vartheta_a)$$

und endlich stehen $\varkappa_1^{(n)}$ *und* $\varkappa_2^{(n)}$ *in den folgenden Bedeutungen:*

$$\varkappa_1^{(n)} = \frac{e^{N(\lambda_m-\lambda_2)}-e^{N(\lambda_2-\lambda_m)}}{e^{N\delta}-e^{-N\delta}}, \qquad \varkappa_2^{(n)} = \frac{e^{N(\lambda_1-\lambda_m)}-e^{N(\lambda_m-\lambda_1)}}{e^{N\delta}-e^{-N\delta}} \qquad (\delta=\lambda_1-\lambda_2).$$

Die Lösungen aller weiteren Probleme betreffend die Vertheilung der statischen Elektricität auf jenem Conductor *K* lassen sich nun auf die angegebenen Lösungen der beiden Fundamentalprobleme zurückführen. Es ist somit auch das allgemeinste dieser Probleme, welches die Vertheilung auf isolirtem, geladenem Conductor *K* unter *gleichzeitiger* Einwirkung *beliebiger* äusserer Kräfte betrifft, als gelöst anzusehen.

§ 7. Sich anschliessende Bemerkungen über das Problem des stationären Temperaturzustandes.

Wie wir schon oben erwähnten (§ 2), stellt im Falle $m = -1$ die auf dem abgeleiteten Conductor von einem äusseren Massenpunkte *m* inducirte Belegung die dem Punkte *m* entsprechende *Green*sche Belegung der Conductoroberfläche dar und ihr Potential die *Green*sche Function, die für Probleme des stationären Temperaturzustandes von so hervorragender Bedeutung ist.

Denken wir uns einen sich ringsum ins Unendliche erstreckenden isotropen Körper, der im Innern einen Hohlraum von der Gestalt des Conductors *K* besitzt, und denken wir uns die innere Begrenzungsfläche in Contact mit beliebig gegebenen aber unveränderlichen Wärmequellen, deren Temperatur *f* also eine Function des Ortes auf der Oberfläche ist, so wird nach Eintritt des stationären Zustandes in dem Punkte *m* die Temperatur

$$(12.)\qquad \Phi_m = \int f\cdot\varepsilon' d\sigma$$

herrschen, die Integration erstreckt über die innere Begrenzungsfläche, also über alle Elemente der Flächen σ_0, σ_1 und σ_2, und unter ε' die in (10.) S. 285 angegebenen Werthe für den Specialfall $m = -1$ verstanden.

Doch es lösen die Formeln des vorigen Paragraphen das Problem des stationären Temperaturzustandes auch noch für eine Reihe weiterer ganz im Endlichen gelegener Körper. — Wir haben nämlich oben garnicht Gebrauch gemacht von unserer Annahme, dass der Punkt m, den wir als Abbildungscentrum benutzten, ausserhalb der den Conductur K' begrenzenden Fläche läge. Die Formeln bleiben daher ungeändert, wenn wir annehmen, der Punkt läge innerhalb dieser Fläche. *Alsdann stellen wieder die Formeln* (10.) und (11.) S. 285–286 *im Falle $m = -1$ die Greensche Belegung und die Greensche Function für die aus der Conductoroberfläche F durch Abbildung von m aus entstehende Fläche F' dar, und zwar liegt der Pol m**) *der Greenschen Function in diesem Falle innerhalb der betrachteten Fläche F'; jene Formeln in Verbindung mit der obigen Formel* (12.) *lösen also das Problem des stationären Temperaturzustandes für einen den Innenraum einer solchen Fläche F' erfüllenden Körper.* — Hinsichtlich der Masse der *Green*schen Belegung ist jedoch ein wesentlicher Unterschied gegen früher zu constatiren, wo der Pol ausserhalb der betrachteten Fläche lag. Es ist nämlich nach einem bekannten Satze *die Masse der einem inneren Punkte entsprechenden Greenschen Belegung einer geschlossenen Fläche stets gleich 1.*

Die Flächen F', deren *Green*sche Belegung und *Green*sche Function wir in den Formeln (10.) und (11.) S. 285–286 erkannt haben, können nun ein sehr verschiedenes Aussehen haben, je nach der speciellen Lage des Abbildungscentrums innerhalb der Conductoroberfläche, von der wir ausgingen,

*) Wenn wir von dem „Pole" der *Green*schen Function sprechen, so geschieht das nur in übertragenem Sinne, nicht etwa in dem Sinne vom Unendlichkeitspunkt. — Wir definiren nämlich nach dem Vorgange von *C. Neumann* die einem Punkte p entsprechende *Green*sche Function $G^{(p)}$ einer Fläche σ als eine *durchaus stetige Function, die auf jener Fläche die Werthe $\frac{1}{r_p}$ besitzt,* nämlich als das Potential einer Flächenbelegung, eben der sogenannten *Green*schen Belegung $g^{(p)}$. — Es sei dies besonders hervorgehoben, da man vielfach unter der *Green*schen Function auch die Function $\frac{1}{r_p} - G^{(p)}$ versteht, also eine Function, die auf der vorgelegten Fläche verschwindet, und überdies im Punkte p unendlich wie $\frac{1}{r_p}$ wird, im Uebrigen aber die bekannten Potentialbedingungen erfüllt.

stets werden sie aber gebildet werden von Theilen dreier Kugelflächen, deren eine σ'_0 die beiden anderen σ'_1 und σ'_2 orthogonal schneidet*), doch werden sich diese Flächen F' stets darin von der Conductoroberfläche F unterscheiden, dass jene drei Kugelflächentheile nicht wie bei F sämmtlich nach aussen convex sind.

§ 8. Die *Green*sche Function für die Halbkugelschale.

Unter allen diesen Flächen F', welche aus F durch Abbildung nach reciproken Radien entstehen, findet sich nun eine, für welche die Formeln (10.) und (11.) S. 285–286 nicht ohne weiteres die *Green*sche Belegung und Function darstellen, und gerade diese beansprucht das grösste Interesse; auf sie wollen wir daher noch näher eingehen. — Es ist dies nämlich die Oberfläche einer Halbkugelschale K, wie eine solche aus einer von zwei concentrischen Kugelflächen begrenzten Kugelschale durch Halbierung entsteht. Wir erhalten diese Fläche, wenn wir die Conductoroberfläche speciell von einem der beiden Pole des dipolaren Systems, z. B. von A_1 aus abbilden. Wir dürfen daher nicht die in § 6 des ersten Abschnittes entwickelten allgemeinen Transformationsformeln, sondern nur die speciellen Formeln von § 7 in Anwendung bringen. Sie führen auf gewöhnliche Polarcoordinaten, wie solche auch augenscheinlich dieser Halbkugelschale weit besser angepasst sind, wie dipolare Coordinaten.

Wir bezeichnen mit R_1 und R_2 ($R_1 > R_2$) die Radien der beiden die Halbkugelschale begrenzenden Halbkugelflächen und ferner mit ϱ_p den Abstand des Abbildungscentrums p, d. i. des Poles A_1 vom Centrum a dieser Flächen, dann ist nach Absch. I § 7:

$$(1.)\qquad e^{\lambda_1} = \frac{R_1}{\varrho_p}, \quad e^{\lambda_2} = \frac{R_2}{\varrho_p} \quad \text{und} \quad 2a = \frac{H^2}{\varrho_p}.$$

Wählen wir sodann dieses Centrum a zum Anfangspunkte eines monopolaren

*) Es kann daher wohl über die Bedeutung der Grössen λ_1, λ_2, ϑ_c, $\varphi_c \cdots$ in jenen Formeln kein Zweifel herrschen. — Hinsichtlich der Parameter λ_1 und λ_2 sei noch bemerkt, dass dieselben jetzt nur noch der Beschränkung $\lambda_1 > \lambda_2$, nicht aber mehr der specielleren $\lambda_1 > 0 > \lambda_2$ unterworfen sind. Von den Kugelflächen σ'_1 und σ'_2 kann eben auch die eine die andere umschliessen und demgemäss können λ_1 und λ_2 dasselbe Vorzeichen haben.

Coordinatensystems (ϱ, ω, o), und legen die Axe desselben durch den Punkt p, so ist allgemein:

$$(2.)\quad e^{\lambda}=\frac{\varrho}{\varrho_p},\quad \vartheta=\omega,\quad o=\varphi \quad \text{und daher} \quad \psi=\frac{\varrho}{\varrho_p}+\frac{\varrho_p}{\varrho}-2\cos\omega=\frac{r^2}{\varrho\cdot\varrho_p},$$

wenn ϱ, ω, o die Polar-Coordinaten des dem Punkte $\xi(\lambda, \vartheta, \varphi)$ conjugirten Punktes und r dessen Abstand von p darstellt. Denken wir uns daher den Conductor K geladen bis zu dem Potentialwerth $\frac{1}{H}$ (es ist $m=-1$ gesetzt), so ist nach den Formeln (12.) S. 281 die Dichtigkeit der entstehenden Gleichgewichtsvertheilung in Elementen $d\sigma_0$, $d\sigma_1$ und $d\sigma_2$ der drei begrenzenden Kugelflächen

$$(3.)\quad \begin{cases} \varepsilon_0 = \frac{1}{H}\cdot\frac{1}{4\pi\mathfrak{r}}\left\{1-\left(\frac{r_0^2}{\varrho_0\varrho_p}\right)^{\frac{3}{2}}\sum_{n=0}^{\infty}\left(k_1^{(n)}\left(\frac{\varrho_0}{\varrho_p}\right)^N\left(\frac{\varrho_p}{R_1}\right)^N+k_2^{(n)}\left(\frac{R_2}{\varrho_p}\right)^N\left(\frac{\varrho_p}{\varrho_0}\right)^N\right)P'_n(\cos\omega_0)\right\} \\ \varepsilon_2 = \frac{1}{H}\frac{\varrho_p}{2\pi H^2}\left(\frac{r_1^2}{\varrho_1\varrho_p}\right)^{\frac{3}{2}}\sum_{n=0}^{\infty}Nk_1^{(n)}\left(P_n(\cos\omega_1)-P_n(\cos\gamma_1')\right) \\ \varepsilon_2 = \frac{1}{H}\frac{\varrho_p}{2\pi H^2}\left(\frac{r_2^2}{\varrho_2\varrho_p}\right)^{\frac{3}{2}}\sum_{n=0}^{\infty}Nk_2^{(n)}\left(P_n(\cos\omega_1)-P_n(\cos\gamma_2')\right) \end{cases}$$

wo $\mathfrak{r}$ für den Radius der Kugelfläche σ_0 steht, also zu setzen ist:

$$\mathfrak{r} = \frac{a}{\sin\frac{\vartheta_c}{2}} = \frac{H^2}{2\varrho_p\sin\frac{\vartheta_c}{2}}.$$

Sodann folgt für das Potential dieser Belegung in einem äusseren Punkte $\xi(\lambda, \vartheta, \varphi)$ nach der Formel (13.) S. 281, wenn wir berücksichtigen, dass in derselben $\frac{\varrho}{r}=\left(\frac{\psi}{e^{\lambda}+e^{-\lambda}-2\cos\gamma}\right)^{\frac{1}{2}}$ ist, der Ausdruck:

$$(4.)\quad \begin{cases} V = \frac{1}{H}\left(\frac{r^2}{\varrho\varrho_p}\right)^{\frac{1}{2}}\left\{\frac{1}{\left(\frac{\varrho}{\varrho_p}+\frac{\varrho_p}{\varrho}-2\cos\gamma'\right)^{\frac{1}{2}}}\right. \\ \left.\quad +\sum_{n=0}^{\infty}\left(k_1^{(n)}\left(\frac{\varrho}{\varrho_p}\right)^N\cdot\left(\frac{\varrho_p}{R_1}\right)^N+k_2^{(n)}\left(\frac{R_2}{\varrho_p}\right)^N\cdot\left(\frac{\varrho_p}{\varrho}\right)^N\right)\cdot\left(P_n(\cos\omega)-P_n(\cos\gamma')\right)\right\} \end{cases}$$

und hier ist allgemein zu setzen:

$$(5.)\qquad \cos\gamma' = \cos\omega\cdot\cos\vartheta_c+\sin\omega\cdot\sin\vartheta_c\cos(o-\varphi_c),$$

$$(6.)\quad \begin{cases} k_1^{(n)}=\frac{\left(\frac{\varrho_p}{R_2}\right)^N-\left(\frac{R_2}{\varrho_p}\right)^N}{\left(\frac{R_1}{R_2}\right)^N-\left(\frac{R_2}{R_1}\right)^N}=\left(\frac{R_1}{\varrho_p}\right)^N\cdot h_1^{(n)}, \quad k_2^{(n)}=\frac{\left(\frac{R_1}{\varrho_p}\right)^N-\left(\frac{\varrho_p}{R_1}\right)^N}{\left(\frac{R_1}{R_2}\right)^N-\left(\frac{R_2}{R_1}\right)^N}=\left(\frac{R_2}{\varrho_p}\right)^N\cdot h_2^{(n)}, \\ h_1^{(n)} = \frac{\varrho_p^{2n+1}-R_2^{2n+1}}{R_1^{2n+1}-R_2^{2n+1}}, \qquad h_2^{(n)} = \frac{R_1^{2n+1}-\varrho_p^{2n+1}}{R_1^{2n+1}-R_2^{2n+1}}. \end{cases}$$

Mit dieser Dichtigkeit ε und dem Potential V hängen nun nach den Formeln (4.) und (5.) S. 85 die Dichtigkeit g der dem Punkte p entsprechenden *Green*schen Belegung und die *Green*sche Function $G^{(p)}$ der Halbkugelschale in einfacher Weise zusammen; es ist in den jenen Elementen $d\sigma$ conjugirten Elementen ds, bezw. in dem zu ξ conjugirten Punkte

$$(7.) \qquad g = \frac{H^2}{r^3}\cdot\varepsilon \quad \text{und} \quad V = \frac{H}{r}\cdot V,$$

und hier ist wiederum $r = \sqrt{\varrho^2+\varrho_p^2-2\varrho\varrho_p\cos\omega}$ gleich dem Abstande des betrachteten Punktes von p.

Mit Rücksicht auf die Formel (4.) empfiehlt es sich, dann noch die Grösse $r' = \sqrt{\varrho^2+\varrho_p^2-2\varrho\varrho_p\cos\gamma'}$ einzuführen. — Es ist dies dann die Entfernung des betrachteten Punktes von einem auxiliaren Punkte p', dessen Coordinaten

(8.) ϱ_p, ϑ_c und φ_c sind.

Wir wollen nun die Lage dieses auxiliaren Punktes p' noch näher untersuchen. Wir bemerken zunächst, dass der Radiusvector, auf welchem p' liegt, nach (2.) und (8.) augenscheinlich durch Abbildung aus dem ϑ-Bogen des Centrums c von σ_0 hervorgegangen ist, und dass andererseits der Radiusvector von p der Axe des betrachteten dipolaren Systems entspricht. — Nun bildeten aber nach einer Bemerkung auf S. 67 diese Axe und jener ϑ-Bogen des Punktes c gleiche Winkel mit den sämmtlichen ϑ-Bogen der Fläche σ_0, es werden mithin auch die Radiivectoren von p und p' gleiche Winkel bilden mit den sämmtlichen Radiivectoren der jener Fläche σ_0 conjugirten Fläche, d. i. des ebenen Randes der Halbkugelschale. Da nun ferner nach (8.) die Radiivectoren von p und p' ihrer Länge nach gleich sind, gleich ϱ_p, so folgt, dass p und p' Spiegelpunkte sind in Bezug auf die Ebene jenes Randes, die „*Grundebene*" der Halbkugelschale.

Es ist also r die Entfernung des gerade betrachteten Punktes von p, r' von diesem Spiegelpunkte p' und ferner sind ω und γ' die correspondirenden Winkel zwischen den Radiivectoren dieser drei Punkte.

Diese letztere Bemerkung setzt uns in den Stand, das Polarcoordinatensystem etwas anders zu legen. Wir wollen nämlich zur Axe des Systems jetzt die Rotationsaxe der Halbkugelschale, die zur Grundebene senkrechte Gerade wählen. — In diesem System besitze der Punkt p die Coordinaten ϱ_p, ω_p, o_p. Dann besitzt der Spiegelpunkt p' die Coordinaten ϱ_p, $\pi-\omega_p$, o_p, es ist also unser früheres $\cos\omega$ jetzt gleich

$$(9^a.) \qquad \cos\gamma = \cos\omega\cdot\cos\omega_p+\sin\omega\cdot\sin\omega_p\cdot\cos(o-o_p)$$

und ferner ist alsdann

$$(9^b.)\qquad \cos\gamma' = -\cos\omega\cdot\cos\omega_p+\sin\omega\cdot\sin\omega_p\cdot\cos(o-o_p);$$

endlich besitzt ϑ_c, d. i. nach (8.) der Winkel zwischen den Radiivectoren der Punkte p und p' den Werth $\vartheta_c=\pi-2\omega_p$, sodass wir jetzt unsere bisherigen Resultate zusammenfassend, den folgenden Satz aussprechen können:

Es sei eine Halbkugelschale gegeben, wie eine solche durch Halbirung einer von zwei concentrischen Kugelflächen begrenzten Kugelschale entsteht. — Das gemeinsame Centrum a der beiden begrenzenden Halbkugelflächen s_1 und s_2 (Radien R_1 und R_2, $R_1>R_2$) wählen wir zum Anfangspunkte eines Polarcoordinatensystems (ϱ, ω, o) und die Rotationsaxe der Halbkugelschale zur Axe desselben.

Alsdann ist die einem innern Punkte p (ϱ_p, ω_p, o_p) entsprechende Greensche Function dieser Halbkugelschale:

$$G^{(p)}(\varrho,\,\omega,\,o)=\frac{1}{r'}+\sum_{n=0}^{\infty}\Big(h_1^{(n)}\frac{\varrho^n}{\varrho_p^{n+1}}+h_2^{(n)}\frac{R_2^{2n+1}}{\varrho^{n+1}\cdot\varrho_p^{n+1}}\Big)\Big(P_n(\cos\gamma)-P_n(\cos\gamma')\Big)$$

und ferner besitzt die Dichtigkeit der diesem Punkte p entsprechenden Greenschen Belegung in Elementen ds_0, ds_1, ds_2 des ebenen ringförmigen Randes, der grösseren und der kleineren Halbkugelfläche die Werthe:

$$g_0=\frac{\varrho_p\cos\omega_p}{2\pi}\Big\{\frac{1}{r_0^3}-\sum_{n=0}^{\infty}\Big(h_1^{(n)}\frac{\varrho_0^{n-1}}{\varrho_p^{n+2}}+h_2^{(n)}\frac{R_2^{2n+1}}{\varrho_0^{n+2}\varrho_p^{n+2}}\Big)P_n'(\cos\gamma_0)\Big\},$$

$$g_1=\frac{\varrho_p}{2\pi}\sum_{n=0}^{\infty}N\cdot h_1^{(n)}\frac{R_1^{n-1}}{\varrho_p^{n+2}}\Big(P_n(\cos\gamma_1)-P_n(\cos\gamma_1')\Big),$$

$$g_2=\frac{\varrho_p}{2\pi}\sum_{n=0}^{\infty}N\cdot h_2^{(n)}\frac{R_2^{n-1}}{\varrho_p^{n+2}}\Big(P_n(\cos\gamma_2)-P_n(\cos\gamma_2')\Big).$$

Dabei bedeuten ϱ, ω, o mit den entsprechenden Indices die Polarcoordinaten der Elemente ds_0, ds_1 und ds_2. Ferner bezeichnet r die Entfernung des sollicitirten Punktes von p (ϱ_p, ω_p, o_p) und r' von p' (ϱ_p, $\pi-\omega_p$, o_p), d. i. von dem Spiegelpunkte von p in Bezug auf die Grundebene der Halbkugelschale (Ebene des ringförmigen Randes). — Sodann stehen $h_1^{(n)}$, $h_2^{(n)}$, $\cos\gamma$ und $\cos\gamma'$ in den in (6.), (9^a.) *und* (9^b.) *angegebenen Bedeutungen, sodass also γ und γ' die Winkel sind, die der Radiusvector des sollicitirten Punktes mit den Radiivectoren von p, bezw. p' bildet.*

§ 9. Eine andere Ableitung des letzten Resultates.

Die letzten Paragraphen haben uns durch eine lange Reihe von Schlüssen zur Berechnung der *Green*schen Function für eine Halbkugelschale geführt und damit zu einem Resultate, das sich auch auf anderem, directerem Wege leicht ableiten und damit controlliren lässt, wie das jetzt näher ausgeführt werden soll.

Wir denken uns die *Green*sche Belegung der Halbkugelschale H bereits gefunden und bezeichnen dieselbe mitsammt einer im Pole p befindlichen Masse —1 als Massensystem S. — Das Potential dieses Systems S, d. i. also

$$(1.) \qquad G^{(p)} - \frac{1}{r},$$

ist alsdann in allen äusseren Punkten gleich 0.

Sodann bemerken wir, dass augenscheinlich die *Green*sche Belegung symmetrisch ist in Bezug auf die durch p gelegte Meridianebene, und mithin die Belegung speciell des ebenen ringförmigen Randes symmetrisch in Bezug auf die Schnittlinie L dieser Meridianebene mit der Grundebene der Halbkugelschale. Drehen wir also das ganze Massensystem R um diese Gerade L um 180° und bringen somit H in die Lage der complementären Halbkugelschale H', so ist an jeder Stelle des ebenen Randes genau dieselbe Dichtigkeit vorhanden, wie vordem, oder aber, wenn wir bei jener Drehung sämmtliche Massen ihr Vorzeichen wechseln lassen, genau die entgegengesetzte Dichtigkeit, wie ursprünglich. Combiniren wir also das ursprüngliche System S mit diesem zuletzt betrachteten System S' zu einem einzigen Massensystem Σ,

$$(2.) \qquad \Sigma = S + S',$$

so herrscht an allen Stellen jenes Randes die Dichtigkeit 0, es ist auf diesem Rande überhaupt keine Masse vorhanden, und *es besteht daher das System Σ lediglich aus den in dem Punkte p, bezw. in seinem Spiegelpunkte p' vorhandenen Massen -1 und $+1$ und aus gewissen Belegungen γ_1 und γ_2 der beiden Kugelflächen σ_1 und σ_2*, die durch Ergänzung der Halbkugelflächen s_1 und s_2 entstehen, und zwar sind diese Belegungen, soweit sie noch auf s_1 und s_2 selber liegen, identisch mit den gesuchten *Green*schen Belegungen g_1 und g_2 dieser Flächen, also

$$(3.) \qquad g_1 = \gamma_1, \qquad g_2 = \gamma_2.$$

Wie nun das Potential des Systems S in Punkten ausserhalb H gleich 0 war (vgl. (1.)), so wird augenscheinlich auch das Potential von S' in Punkten ausserhalb H' verschwinden, es reducirt sich daher z. B. innerhalb H das Potential des combinirten Systems Σ (2.), d. i. $-\frac{1}{r}+\frac{1}{r'}+\Gamma(\varrho, \omega, o)$, wenn Γ das Potential der Kugelflächenbelegungen γ_1 und γ_2 bedeutet, auf das Potential des Systems S, d. i. auf $-\frac{1}{r}+G^{(p)}(\varrho, \omega, o)$; es folgt also

$$(4.)\qquad G^{(p)}(\varrho, \omega, o) = \frac{1}{r'}+\Gamma(\varrho, \omega, o),$$

und ferner folgt, dass das Potential von Σ ausserhalb der grösseren Kugelfläche σ_1 und innerhalb der kleineren Kugelfläche σ_2 verschwindet. — Diese letzte Eigenschaft besagt aber, dass die Belegungen γ der Kugelflächen σ_1 und σ_2, sowie ihr Potential Γ durch Superposition aus den den Punkten p und p' entsprechenden *Green*schen Belegungen $\gamma^{(p)}$ und $\gamma^{(p')}$ und den zugehörigen *Green*schen Functionen $\Gamma^{(p)}$ und $\Gamma^{(p')}$ der ganzen Kugelschale zu erhalten sind,

$$\gamma_1 = \gamma_1^{(p)}-\gamma_1^{(p')}, \qquad \gamma_2 = \gamma_2^{(p)}-\gamma_2^{(p')}, \qquad \Gamma = \Gamma^{(p)}-\Gamma^{(p')},$$

oder mit Rücksicht auf (3.) und (4.):

$$(5.)\qquad g_1 = \gamma_1^{(p)}-\gamma_1^{(p')}, \quad g_2 = \gamma_2^{(p)}-\gamma_2^{(p')}, \quad G^{(p)} = \frac{1}{r'}+\Gamma^{(p)}-\Gamma^{(p')}.$$

Wir haben damit also das Problem, die Greensche Belegung und Greensche Function für die Halbkugelschale zu finden, zurückgeführt auf das Problem, die entsprechenden Grössen $\gamma^{(p)}$ und $\Gamma^{(p)}$ für die Vollkugelschale zu bestimmen).*

Um nun zunächst diese Aufgabe zu lösen, legen wir die Axe des Polarcoordinatensystems durch den Punkt p. Alsdann werden die Belegungen $\gamma^{(p)}$ der beiden Kugelflächen σ_1 und σ_2 augenscheinlich symmetrisch sein in

---

*) Dieses Verfahren ist, wie *C. Neumann* bemerkte, einer grossen Verallgemeinerung fähig. Ist nämlich die *Green*sche Function für den Innenraum *irgend einer in Bezug auf eine Ebene symmetrischen Fläche* bekannt, so kann jenes Verfahren stets dazu dienen, die *Green*sche Function zu finden auch für den durch Halbirung entstehenden Raum, doch ist auch damit das Feld der Anwendbarkeit der Methode durchaus nicht erschöpft, wie ich vielleicht gelegentlich an anderer Stelle ausführen werde.

Bezug auf diese Axe, wir werden also für ihre Dichtigkeiten den Ansatz machen können

$$\gamma_1^{(p)} = \sum_{n=0}^{\infty} q_1^{(n)} P_n(\cos\omega_1), \qquad \gamma_2^{(p)} = \sum_{n=0}^{\infty} q_2^{(n)} P_n(\cos\omega_2).$$

Dann lässt sich auch das Potential $\Gamma^{(p)}$ dieser Belegungen in bekannter Weise in eine Reihe nach Kugelfunctionen entwickeln und desgleichen auch das Potential $-\frac{1}{r}$ der in p gedachten Masse -1. — Diese Reihen werden eine verschiedene Form haben, je nachdem wir den sollicitirten Punkt innerhalb σ_2, zwischen σ_1 und σ_2 oder aber ausserhalb σ_1 annehmen. — Wir bestimmen nun die bisher noch willkürlichen Coefficienten $q_1^{(n)}$ und $q_2^{(n)}$ in der Weise, dass die Potentiale $\Gamma^{(p)}$ und $-\frac{1}{r}$ zusammen genommen innerhalb σ_2 und ausserhalb σ_1, d. h. sobald $\varrho < R_2$ oder $\varrho > R_1$ ist, verschwinden, wozu das Verschwinden der einzelnen Coefficienten der nach Kugelfunctionen fortschreitenden Reihen nothwendig ist. Wir erhalten in dieser Weise

$$(6.) \qquad q_1^{(n)} = \frac{1}{2\pi} N \cdot \frac{R_1^{n-1}}{\varrho_p^{n+1}} \cdot h_1^{(n)}, \qquad q_2^{(n)} = \frac{1}{2\pi} \cdot N \frac{R_2^{n-1}}{\varrho_p^{n+1}} h_2^{(n)},$$

wo $h_1^{(n)}$ und $h_2^{(n)}$ genau die in (6.) S. 289 angegebenen Bedeutungen haben.

Es ergeben sich somit für die Dichtigkeiten der dem Punkte p entsprechenden *Green*schen Belegung der ganzen Kugelschale die Formeln:

$$\gamma_1^{(p)} = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=0}^{\infty} N h_1^{(n)} \frac{R_1^{n-1}}{\varrho_p^{n+1}} P_n(\cos\omega_1), \qquad \gamma_2^{(p)} = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=0}^{\infty} N h_2^{(n)} \frac{R_2^{n-1}}{\varrho_p^{n+1}} P_n(\cos\omega_2)$$

und daraus für die *Green*sche Function, d. i. das Potential dieser Belegung in Punkten der Kugelschale selber ($R_1 > \varrho > R_2$), der Ausdruck

$$\Gamma^{(p)} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(h_1^{(n)} \frac{\varrho^n}{\varrho_p^{n+1}} + h_2^{(n)} \frac{R_2^{2n+1}}{\varrho^{n+1} \varrho_p^{n+1}} \right) P_n(\cos\omega).$$

Hier bedeutet immer ω den Winkel, den der Radiusvector des gerade betrachteten Punktes mit dem Radiusvector von p bildet. Führen wir also wieder unser altes Coordinatensystem ein, in dem p die Coordinaten ϱ_p, ω_p, o_p besass, so haben wir überall $\cos\omega$ zu ersetzen durch

$$\cos\gamma = \cos\omega \cdot \cos\omega_p + \sin\omega \cdot \sin\omega_p \cdot \cos(o - o_p)$$

und wenn wir anstatt des Punktes p den Spiegelpunkt $p'(\varrho_p, \pi-\omega_p, o_p)$ als Pol betrachten, durch

$$\cos\gamma' = -\cos\omega\cdot\cos\omega_p+\sin\omega\cdot\sin\omega_p\cdot\cos(o-o_p),$$

sodass wir nach den Formeln (5.) das folgende Resultat über die *Green*sche Belegung und die *Green*sche Function der Halbkugelschale erhalten:

$$g_1 = \frac{1}{2\pi}\sum_{n=0}^{\infty} N h_1^{(n)} \frac{R_1^{n-1}}{\varrho_p^{n+1}}\Big(P_n(\cos\gamma_1)-P_n(\cos\gamma_1')\Big),$$

$$g_2 = \frac{1}{2\pi}\sum_{n=0}^{\infty} N h_2^{(n)}\cdot \frac{R_2^{n-1}}{\varrho_p^{n+1}}\Big(P_n(\cos\gamma_2)-P_n(\cos\gamma_2')\Big),$$

$$G^{(p)}(\varrho,\omega,o) = \frac{1}{r'}+\sum_{n=0}^{\infty}\Big(h_1^{(n)}\frac{\varrho^n}{\varrho_p^{n+1}}+h_2^{(n)}\frac{R_2^{2n+1}}{\varrho^{n+1}\varrho_p^{n+1}}\Big)\cdot\Big(P_n(\cos\gamma)-P_n(\cos\gamma')\Big),$$

und dieses Resultat stimmt thatsächlich mit dem oben auf ganz anderem Wege abgeleiteten überein (vgl. S. 291). — Bei diesem zweiten Wege haben wir bisher freilich noch nicht die Dichtigkeit der Belegung des ebenen ringförmigen Randes der Halbkugelschale berechnet, doch geschieht auch dies sehr leicht mittelst der Formel $g_0 = -\frac{1}{4\pi}\left(\frac{\partial G}{\partial n_0}-\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial n_0}\right)$, wo n_0 die innere, d. h. in die Halbkugelschale hineingerichtete Normale bedeutet. Die einfache Rechnung, die ich wohl übergehen darf, lehrt, dass auch hier völlige Uebereinstimmung zwischen den auf den verschiedenen Wegen abgeleiteten Resultaten besteht. Wir haben damit also das oben S. 291 angegebene Resultat auf seine Richtigkeit hin controllirt — doch nicht dieses Resultat allein, sondern mit ihm die ganze Reihe von Schlüssen, die uns zu ihm führten.

§ 10. Ein allgemeiner Satz über Niveauflächen in der Elektrostatik.

Wir wenden uns mit diesem Paragraphen wieder allgemeineren Betrachtungen zu.

Wir denken uns zunächst *eine einzige* isolirte Metallkugel gegeben. Auf dieselbe wirke von aussen her ein beliebig gelegener elektrischer Massenpunkt m. Es lässt sich alsdann leicht zeigen, dass man die Kugel derart elektrisch laden kann, dass die um m gelegte, zur Metallkugel

orthogonale Kugelfläche eine Niveaufläche wird*), oder vielmehr mit der Metallkugel selber eine einzige (verzweigte) Niveaufläche bildet. Der auf dieser singulären Fläche vorhandene Potentialwerth ist dann $\frac{m}{\varrho}$, wenn ϱ den Radius jener Orthogonalkugelfläche bedeutet. — Sind *zwei* isolirte Metallkugeln gegeben, so gilt, wie wir in § 4 bewiesen, ein ganz analoger Satz. — Wirkt auf dieselben nämlich ein im Centrum einer sie orthogonal schneidenden Kugelfläche gelegener elektrischer Massenpunkt m, so kann man die Kugeln stets elektrisch derart laden, dass ihre Oberflächen mit jener Orthogonalkugelfläche zusammen eine Niveaufläche bilden. Wieder hat alsdann das Potential auf derselben den Werth $\frac{m}{\varrho}$.

Es liegt hiernach die Vermuthung nahe, es könnten analoge Sätze auch gelten für Systeme von 3, 4, ..., allgemein n Kugeln. Es würde sich in diesem allgemeinsten Falle also um den folgenden Satz handeln:

Es sind gegeben n isolirte Metallkugeln K_1, K_2, ... K_n, so gelegen, dass sie eine gemeinsame Orthogonalkugelfläche besitzen. Auf dieselben wirke ein elektrischer Massenpunkt m ein, der sich gerade im Centrum c dieser Orthogonalkugelfläche befindet. Alsdann können wir diese n Kugeln stets derart elektrisch laden, dass ihre Oberflächen zusammen mit jener Orthogonalkugelfläche eine einzige (verzweigte) Niveaufläche bilden.

Sollte sich dieser Satz als richtig erweisen, so dürfte, aus der Analogie mit den oben angeführten Specialfällen zu schliessen, der auf dieser Niveaufläche vorhandene Potentialwerth gleich $\frac{m}{\varrho}$ sein, wenn ϱ wiederum den Radius jener Orthogonalkugelfläche bedeutet. Wir wollen daher den Fall betrachten, dass die sämmtlichen unter der Einwirkung von m stehenden n Kugeln bis zur Spannung $\frac{m}{\varrho}$ geladen sind.

Das Potential der in diesem Falle auf den Kugeln entstehenden Belegung erhalten wir nun durch Superposition zweier Potentiale, erstlich des (1.) Potentials U derjenigen Belegung, die auf isolirten Kugeln entsteht, wenn wir sie, ohne dass äussere Kräfte einwirken, bis zu dem Potentialwerth $\frac{m}{\varrho}$ laden, und sodann des Potentials V der auf abgeleiteten Kugeln von m in-

*) Man vergleiche den Aufsatz von *Leonhard Weber* im 8. Bande der Mathematischen Annalen.

ducirten Belegung. — Zu diesen beiden Potentialen U und V kommt schliesslich noch das Potential $\frac{m}{r}$ des Massenpunktes m hinzu, sodass das Gesammtpotential des Systems in einem Punkte ξ

$$(2.)\qquad \Omega_\xi = \frac{m}{r} + U_\xi + V_\xi$$

ist, wo r den Abstand des Punktes ξ von m bedeutet.

Um nun dieses letztere Potential V_ξ zu bestimmen, denken wir uns zunächst (vgl. § 1) ein System von Conductoren $K'_1, K'_2, \cdots K'_n$, die zu $K_1, K_2, \cdots K_n$ conjugirt sind in Bezug auf eine um m gelegte Kugelfläche vom Radius H. — Diese Conductoren $K'_1, K'_2, \cdots K'_n$ denken wir uns alsdann sämmtlich geladen bis zu dem Potentialwerthe $-\frac{m}{H}$, und bezeichnen ihr Potential in einem Punkte ξ' mit $V'_{\xi'}$. Dann ist nach (5.) S. 85.

$$(3.)\qquad V_\xi = \frac{H}{r} \cdot V'_{\xi'}$$

wenn ξ und ξ' conjugirt sind in Bezug auf eben jene Kugelfläche.

Es liegt nun sehr nahe, $H = \varrho$ zu machen, also zur Abbildungskugelfläche, speciell jene Orthogonalkugelfläche zu wählen. Dann werden, wie man leicht einsieht, die Bildconductoren $K'_1, K'_2, \cdots K'_n$ identisch mit den ursprünglich gegebenen Conductorkugeln $K_1, K_2, \cdots K_n$ und es stellt demnach V' das Potential der ohne Einwirkung äusserer Kräfte bis zur Spannung $-\frac{m}{\varrho}$ geladenen Kugeln $K_1, K_2, \cdots K_n$ dar, sodass (nach der obigen Definition (1.) von U) V' gleich $-U$ und mithin zufolge Formel (3.)

$$V_\xi = -\frac{\varrho}{r} \cdot U_{\xi'}$$

wird, woraus weiter nach (2.) für das Gesammtpotential folgt:

$$(4.)\qquad \Omega_\xi = \frac{m}{r} + U_\xi - \frac{\varrho}{r} U_{\xi'}.$$

Aus dieser Darstellungsweise ist jetzt sofort ersichtlich, welchen Werth das Potential Ω in Punkten o der Orthogonalkugelkugelfläche besitzt. In diesen Punkten fällt nämlich ξ mit seinem Bildpunkte ξ' zusammen, es wird also $U_{\xi'} = U_\xi$, und gleichzeitig ist $r = \varrho$; es ergiebt sich daher sofort aus (4.)

$$\Omega_0 = \frac{m}{\varrho}.$$

Es ist somit thatsächlich auf der Orthogonalkugelfläche derselbe Potentialwerth $\frac{m}{\varrho}$ vorhanden, wie auf den Conductoren $K_1, K_2 \cdots K_n$. — *Damit ist unser oben vermuthungsweise ausgesprochener Satz bewiesen.*

Sollte nun dieser Satz nicht noch einer Erweiterung fähig sein? Sollte nicht ganz Analoges auch für Systeme von anderen Conductoren als gerade von den kugelförmigen gelten? Ein Blick auf unseren obigen Beweis zeigt, dass die einzig wesentliche Eigenschaft jenes Systems von Conductorkugeln, von der wir bei jenem Beweise Gebrauch machten, die war, dass es durch Abbildung an einer Kugelfläche in sich selbst überging. Für jedes System von Conductoren, das diese Bedingung erfüllt, wird daher ein ganz analoger Satz gelten. Wir sind somit zu dem folgenden ganz allgemeinen Resultate gelangt:

Es sei gegeben ein System von Conductoren, das die Eigenschaft habe, durch Abbildung an einer beliebigen Kugelfläche σ (Radius ϱ) in sich selbst transformirt zu werden. Dieses System stehe unter der Einwirkung eines elektrischen Massenpunktes m, der sich gerade im Centrum jener Kugelfläche σ befindet. — Laden wir alsdann die sämmtlichen Conductoren des Systems bis zum Potentialwerth $\frac{m}{\varrho}$, so wird der nämliche Potentialwerth auch auf jener Kugelfläche σ vorhanden sein.

Solcher Conductorensysteme, die durch Abbildung nach reciproken Radien von gewissen Punkten aus in sich selber transformirt werden, giebt es nun eine ganze Anzahl von relativ einfacher Form; so besitzt diese Eigenschaft z. B. jeder linsenförmige, d. h. von zwei Kugelcalotten begrenzte Conductor, jeder Conductor von der Gestalt eines Conoides oder einer Cyklide (vgl. den folgenden Paragraphen). Auch werden zwei kugelförmige Conductoren ausser durch Abbildung an einer Orthogonalkugelfläche auch noch durch Abbildung an einer gewissen, um den Scheitelpunkt ihres gemeinsamen äusseren Tangentenkegels beschriebenen Kugelfläche in einander übergehen. — So ist man also in der Lage, die Richtigkeit jenes allgemeinen Satzes in einer Reihe von Specialfällen zu prüfen.

§ 11. Die *Green*sche Function für den Kugelsector.

Im vorigen Paragraphen haben wir einen Satz angegeben, der uns in den Stand setzt, in vielen Fällen ohne nähere Untersuchung das Vor-

handensein einfacher Niveauflächen vorauszusagen. Die Kenntniss solcher einfachen Niveauflächen ist nun insofern von einiger Wichtigkeit, als dieselben, wie das in § 5 näher dargethan ist, zur Lösung gewisser Potentialaufgaben für weitere Körper benutzt werden können. — Ein einfaches Beispiel dieser Art wollen wir noch in dem gegenwärtigen Paragraphen behandeln.

Mehler hat die *Green*sche Function für den unbegrenzten Halbkegel bestimmt. Das Problem, mit dem wir uns jetzt beschäftigen wollen, betrifft nun die Bestimmung dieser Function für den begrenzten, und zwar speciell für den kugelförmig begrenzten Halbkegel, d. h. für den Kugelsector.

Wir denken uns zunächst einen Conductor gegeben, dessen Oberfläche gebildet wird von einer Conoidfläche, die einem dipolaren System mit dem Parameter ϑ_1 angehöre. — Auf diesen Conductor wirke ein in der Verlängerung seiner Axe gelegener elektrischer Massenpunkt m. Durch Abbildung an der um diesen Punkt m beschriebenen λ-Kugelfläche (λ_0) jenes dipolaren Systems geht dann der conoidische Conductor in sich selber über, wir werden ihn also zufolge unseres obigen allgemeinen Satzes derart elektrisch laden können, dass diese Kugelfläche mit der Conductoroberfläche eine einzige Niveaufläche mit dem Potentialwerth $C = \frac{m}{\varrho}$ bildet.

Für einen solchen conoidischen Conductor sind nun die elektrostatischen Aufgaben gelöst durch die Arbeiten von *Mehler* und *C. Neumann**); wir können also sofort das Potential V des speciellen betrachteten Systems

*) Beide Arbeiten befinden sich im 18. Bande der Mathematischen Annalen (S. 161, bezw. 195). — Während *Mehler* nur das erste Fundamentalproblem behandelt, enthält die Arbeit von *C. Neumann* auch die Lösung des zweiten Problems (auf S. 228). Daselbst ist jedoch ein Druckfehler untergelaufen, es fehlt nämlich in Formel (2.), wie auch in der Formel (4.) S. 229 unter dem Integralzeichen der Factor C_q. — Uebrigens brauchen wir im vorliegenden Falle, wo der Pol m in der Axe des Systems liegt, garnicht auf die allgemeine Lösung des zweiten Fundamentalproblems zurückzugehen, sondern können dieselbe nach der oben in § 1 angegebenen Methode auf die Lösung des ersten Problems zurückführen.

angeben, und daran die Richtigkeit unserer obigen Behauptung prüfen. — Es ergiebt sich

$$(1.)\quad V(\lambda, \vartheta, \varphi) = C\cdot\left\{\frac{\varrho}{r} + \psi^{\frac{1}{2}}\int_0^\infty dq\, C_q \frac{L_q(\mu_1)}{K_q(\mu_1)} K_q(\mu)[\cos q\lambda - \cos q(\lambda - 2\lambda_0)]\right\}$$

oder

$$(1'.)\quad V(\lambda, \vartheta, \varphi) = C\left\{1 + \psi^{\frac{1}{2}}\int_0^\infty dq\, C_q \frac{L_q(\mu_1)K_q(\mu) - K_q(\mu_1)L_q(\mu)}{K_q(\mu_1)}[\cos q\lambda - \cos q(\lambda - 2\lambda_0)]\right\}.$$

Dabei bedeutet ϱ den Radius jener λ-Kugelfläche (λ_0), r den Abstand des sollicitirten Punktes von deren Centrum (m) und ferner bedeuten $L_q(\mu) = L_q(\cos\vartheta)$ und $K_q(\mu) = K_q(\cos\vartheta) = L_q(-\mu)$ die *Mehler*schen Kegelfunctionen und endlich hat C_q den Werth $\frac{2}{e^{q\pi} + e^{-q\pi}}$.

Dieses Potential $V(\lambda, \vartheta, \varphi)$ besitzt nun aber noch eine weitere Bedeutung. Denken wir uns nämlich jene Conoidfläche und λ-Kugelfläche zusammen als die Oberfläche eines Conductors und diesen elektrisch geladen bis zur innern Spannung C, so stellt V das Potential der entstehenden Gleichgewichtsvertheilung dar. — Zugleich ergiebt sich für die Dichtigkeit η_1 dieser Vertheilung in Punkten $(\lambda_1, \vartheta_1, \varphi_1)$ der Conoidfläche der Werth:

$$(2.)\quad \eta_1 = C\frac{\psi_1^{\frac{3}{2}}}{4\pi^2 a \sin\vartheta_1}\int_0^\infty dq \frac{\cos q\lambda_1 - \cos q(\lambda_1 - 2\lambda_0)}{K_q(\mu_1)}.$$

Um nun auch $\eta_0(\lambda_0, \vartheta_0, \varphi_0)$, die Dichtigkeit der Belegung in Punkten der λ-Kugelfläche, zu berechnen, müssen wir von der Formel $\eta_0 = -\frac{1}{4\pi}\frac{\partial V}{\partial n_0} = -\frac{1}{4\pi}\cdot\left(\frac{\partial V}{\partial \lambda}\right)_0\cdot\frac{\partial \lambda}{\partial n_0}$ Gebrauch machen. Aus ihr folgt, wenn wir $\lambda_0 > 0$ annehmen, mit Rücksicht auf den Satz D S. 70:

$$(3.)\quad \eta_0 = \frac{C}{4\pi}\left\{\frac{1}{\varrho} - \frac{\psi_0}{2a}\cdot 2\psi_0^{\frac{1}{2}}\int_0^\infty q\cdot dq\cdot C_q \frac{L_q(\mu_1)}{K_q(\mu_1)} K_q(\mu_0)\sin q\lambda_0\right\}^{*)},$$

---

*) Um die hier ausgeführte Differentiation unter dem Integralzeichen zu rechtfertigen, müssen wir noch zeigen, dass das resultierende Integral

$$(\alpha)\quad J = \int_0^\infty dq\cdot Q_q\cdot \sin q\lambda_0, \quad \text{wo} \quad Q_q = \frac{F_q}{K_q(\cos\vartheta_1)} = \frac{q\cdot C_q L_q(\cos\vartheta_1)K_q(\cos\vartheta_0)}{K_q(\cos\vartheta_1)}$$

einen bestimmten endlichen Werth besitzt, sobald $0 \leqq \vartheta_0 \leqq \vartheta_1 \leqq \pi$ ist. Wir wollen nun zunächst zeigen, dass der Quotient Q_q mit wachsendem q abnimmt, wollen uns

Auch die Dichtigkeit η_1 können wir nach der entsprechenden Formel berechnen und damit das in (2.) angegebene Resultat controlliren. Mit Rücksicht auf den Satz δ S. 70 folgt aus (1'.)*)

$$\eta_1 = -C\frac{\psi_1^{\frac{3}{2}}}{8\pi a}\sin\vartheta_1\int_0^\infty dq\cdot C_q\frac{L_q(\mu_1)K_q'(\mu_1)-K_q(\mu_1)L_q'(\mu_1)}{K_q(\mu_1)}[\cos q\lambda_1-\cos q(\lambda_1-2\lambda_0)]$$

---

dabei aber auf den Fall $0<\vartheta_0<\vartheta_1<\pi$ beschränken, da sich die übrigen noch möglichen Fälle noch einfacher erledigen. — *Mehler* hat nun gezeigt, dass sich $K_q(\cos\vartheta)$ folgendermassen darstellen lässt:

$$K_q(\cos\vartheta) = e^{q\vartheta}\cdot A_\vartheta + B_\vartheta,$$

wo A_ϑ und B_ϑ gewisse durch Integrale definirte Functionen sind, die mit wachsendem q dauernd abnehmen (vgl. die citirte Arbeit S. 181 oben). — Sodann ist, wenn wir $\pi-\vartheta=\vartheta'$ setzen

$$L_q(\cos\vartheta) = K_q(\cos\vartheta') = e^{q(\pi-\vartheta)}A_{\vartheta'}+B_{\vartheta'}.$$

Multipliciren wir also noch das Product $L_q(\cos\vartheta_1)\cdot K_q(\cos\vartheta_0)$ mit $q\cdot C_q=\frac{2q}{e^{q\pi}+e^{-q\pi}}$, so folgt nach ($\alpha$):

$$(\beta)\quad F_q = D\cdot\frac{2qe^{q[\pi-(\vartheta_1-\vartheta_0)]}}{e^{q\pi}+e^{-q\pi}}+D'\cdot\frac{2qe^{q(\pi-\vartheta_1)}}{e^{q\pi}+e^{-q\pi}}+D''\cdot\frac{2qe^{q\vartheta_0}}{e^{q\pi}+e^{-q\pi}}+D'''\frac{2q}{e^{q\pi}+e^{-q\pi}},$$

wo die D als Producte der A und B mit wachsendem q dauernd abnehmen. Die übrigen Functionen sind sämmtlich von der Form $\frac{2qe^{q(\pi-\delta)}}{e^{q\pi}+e^{-q\pi}}$, wo δ eine mit Rücksicht auf die Relation $0<\vartheta_0<\vartheta_1<\pi$ stets *positive und von* 0 *verschiedene Grösse* ist; alle diese Functionen werden daher schliesslich dauernd abnehmen, bis zur 0. Es folgt daher aus der Darstellungsweise (β), dass von einem bestimmten Werthe von q ab F_q und damit auch $Q_q=F_q\cdot\frac{1}{K_q(\cos\vartheta_1)}$ dauernd abnimmt, bis zur 0; denn auch der Factor $\frac{1}{K_q(\cos\vartheta_1)}$ nimmt dauernd ab. — Von den beiden Factoren unter dem Integralzeichen in der Formel (α) für J nimmt der eine also schliesslich dauernd ab, bleibt aber beständig positiv, während der andere unendlich oft sein Zeichen wechselt, in allen einzelnen Intervallen aber (absolut genommen) denselben Verlauf besitzt. Es löst sich daher J in unendlich viele Partialintegrale von abwechselndem Vorzeichen auf, die absolut genommen, schliesslich immer kleiner werden bis zur 0 herab. Daraus folgt aber, dass J einen bestimmten endlichen Werth hat. q. e. d.

*) Es ist dies die einzige Anwendung, welche wir von der Formel (1'.) machen. Sie ist statthaft, weil wir uns bei der hier ausgeführten Differentiation fern von Punkten der Axe $\vartheta=0$ halten. In Punkten dieser Axe ist nämlich jene Formel nicht mehr anwendbar, da $L_q(\mu)$ für $\mu=1$ unendlich wird.

und diese Formel stimmt thatsächlich mit unserem obigen Resultat (2.) überein, denn wie *C. Neumann* gezeigt hat (vgl. § 4 der citirten Arbeit) ist:

$$L_q(\mu)K'_q(\mu)-K_q(\mu)L'_q(\mu) = -\frac{2}{\pi\cdot C_q(1-\mu^2)}.$$

Damit ist also die Formel (2.) auf ihre Richtigkeit hin controllirt. —

Die drei Formelm (1.), (2.) und (3.) lösen nun also das erste elektrostatische Fundamentalproblem für jenen eigenthümlichen, von einer Conoidfläche und einer λ-Kugelfläche begrenzten Conductor und beanspruchen darum wohl schon einiges Interesse, doch gewinnen sie noch an Wichtigkeit dadurch, dass sie die Lösung des oben angegebenen Problems vermitteln, jenes Problems betreffend die *Green*sche Function des Kugelsectors. Es geht nämlich jener Conductor in den Kugelsector über durch Abbildung vom Pole A_1 aus, und es liefert uns daher das schon in § 8 angewandte Verfahren leicht die gesuchte *Green*sche Function und *Green*sche Belegung.

Wir legen der Betrachtung ein gewöhnliches Polarcoordinatensystem zu Grunde, dem die den Kugelsector begrenzenden Flächen, die Kugelcalotte s_0 und der Kegelmantel s_1 als Flächen $\varrho = \text{const}(=\varrho_0)$ und $\omega = \text{const}(=\omega_1)$ angehören.

Liegt alsdann ein Punkt p im Abstande ϱ_p ($\varrho_p < \varrho_0$) vom Anfangspunkte auf der Axe jenes Polarcoordinatensystems, so ist die diesem Punkte p entsprechende Greensche Function des Kugelsectors:

$$(4.)\quad G^{(p)}(\varrho,\omega,o) = \frac{1}{r'}\cdot\frac{\varrho_0}{\varrho_p} + \frac{1}{\sqrt{\varrho\cdot\varrho_p}}\int_0^\infty dq\, C_q\frac{L_q(\mu_1)}{K_q(\mu_1)}K_q(\mu)[\cos q(t-t_p)-\cos q(t+t_p)].$$

Ferner wird die Dichtigkeit der dem Punkte p entsprechenden Greenschen Belegung in Elementen ds_0 und ds_1 der begrenzenden Kugelcalotte bezw. des Kegelmantels die Werthe besitzen:

$$(5.)\quad \begin{cases} g_0 = \dfrac{1}{4\pi\varrho_0}\left\{\dfrac{\varrho_0^2-\varrho_p^2}{r_0^3} + \dfrac{2}{\sqrt{\varrho_0\varrho_p}}\displaystyle\int_0^\infty q\cdot dq\cdot C_q\frac{L_q(\mu_1)}{K_q(\mu_1)}K_q(\mu_0)\sin q t_p\right\}, \\[2ex] g_1 = \dfrac{1}{2\pi^2\varrho_1\sin\omega_1}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{\varrho_1\varrho_p}}\displaystyle\int_0^\infty dq\,\frac{\cos q(t_1-t_p)-\cos q(t_1+t_p)}{K_q(\mu_1)}; \end{cases}$$

und hier stehen alsdann ϱ, ω, o mit den entsprechenden Indices für die Coordinaten der Elemente ds_0 und ds_1, r und r' für die Abstände des betrachteten Punktes von p bezw. von dem zu p in Bezug auf die Kugelfläche (ϱ_0) conjugirten Punkte p' und endlich steht zur Abkürzung: $\mu = \cos\omega$ *und* $t = \log\frac{\varrho}{\varrho_0}$.

Handelt es sich nun aber darum, die *Green*sche Function des Kugelsectors zu bestimmen für einen Punkt p als Pol, der nicht gerade auf der geometrischen Axe liegt, so können wir augenscheinlich Schritt für Schritt so verfahren, wie oben, nur müssen wir, wie wir oben von einem Conductor ausgingen, der von einer Conoidfläche begrenzt wird, so jetzt ausgehen von einem Conductor, der begrenzt wird von einer *Dupin*schen Cyklide. Es genügt also zur Lösung jenes allgemeineren Problems vollständig, wenn wir wieder nur die Lösung des ersten elektrostatischen Fundamentalproblems für diesen Conductor kennen. Die Lösung dieses Problems kann aber auf die von *C. Neumann* angegebene Lösung des zweiten Fundamentalproblems für jenen conoidischen Conductor zurückgeführt werden, da die Cyklide durch Abbildung aus der Conoidfläche entsteht. — Somit sind wir also in der Lage, auch jenes allgemeinere, den Kugelsector betreffende Problem zu lösen. — Wir übergehen die Rechnung und beschränken uns auf die Angabe des Resultates:

Zusatz. — *Sollte der Punkt p nicht gerade auf der Axe des Kugelsectors liegen, sondern eine beliebige Lage* $(\varrho_p, \omega_p, o_p)$ *im Innern besitzen, so nehmen die obigen Formeln* (4.) und (5.) *für die Greensche Function und Greensche Belegung die folgende Form an:*

$$(6.)\quad \begin{cases} G^{(p)}(\varrho, \omega, o) = \dfrac{1}{r'} \cdot \dfrac{\varrho_0}{\varrho_p} \\[2ex] \quad + \dfrac{1}{\sqrt{\varrho \varrho_p}} \displaystyle\int_0^\infty dq\, C_q \left\{ \sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon_j E_{qj} \frac{L_{qj}(\mu_1)}{K_{qj}(\mu)} K_{qj}(\mu_p) \cdot K_{qj}(\mu) [\cos q(t-t_p) - \cos q(t+t_p)] \cdot \cos j(o-o_p) \right\}, \end{cases}$$

$$(7.)\quad \begin{cases} g_0 = \dfrac{1}{4\pi\varrho_0} \left(\dfrac{\varrho_0^2 - \varrho_p^2}{r_0^3} \right. \\[2ex] \qquad \left. + \dfrac{2}{\sqrt{\varrho_0 \cdot \varrho_p}} \displaystyle\int_0^\infty q \cdot dq \cdot C_q \left\{ \sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon_j E_{qj} \frac{L_{qj}(\mu_1)}{K_{qj}(\mu_1)} \cdot K_{qj}(\mu_p) \cdot K_{qj}(\mu_0) \sin q t_p \cos j(o_0 - o_p) \right\} \right), \\[2ex] g_1 = \dfrac{1}{2\pi^2 \varrho_1 \sin\omega_1} \dfrac{1}{\sqrt{\varrho_1 \cdot \varrho_p}} \displaystyle\int_0^\infty dq \left\{ \sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon_j K_{qj}(\mu_p) \cdot \frac{\cos q(t_1 - t_p) - \cos q(t_1 + t_p)}{K_{qj}(\mu_1)} \cos j(o-o_p) \right\}. \end{cases}$$

Hier bedeuten K_{qj} *und* L_{qj} *die adjungirten Kegelfunctionen:*

$$K_{qj}(\mu) = (1-\mu^2)^{\frac{j}{2}} K_q^{(j)}(\mu) = (1-\mu^2)^{\frac{j}{2}} \frac{d^j K_q(\mu)}{d\mu^j}, \quad L_{qj}(\mu) = (1-\mu^2)^{\frac{j}{2}} L_q^{(j)}(\mu) = (1-\mu^2)^{\frac{j}{2}} \frac{d^j L_q(\mu)}{d\mu^j},$$

und ferner ist allgemein

$$E_{qj} = \frac{1}{2^j \cdot j!\; K_q^j(1)},$$

und endlich stehen die ε_j *in den bekannten Bedeutungen* $\varepsilon_0 = 1$, $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = \cdots = 2$.

Damit ist also das Problem des stationären Temperaturzustandes für den Kugelsector ganz allgemein gelöst. — Erhalten wir die Oberfläche dauernd in demselben beliebig gegebenen Temperaturzustande, derart, dass also die Temperatur φ an der Oberfläche eine gegebene Function des Ortes ist, so ist nach Eintritt des stationären Zustandes in dem ganz beliebig im Innern gelegenen Punkte p die Temperatur

$$\Phi_p = \int \varphi \cdot g \cdot ds = \int \varphi_0 g_0 ds_0 + \int \varphi_1 g_1 ds_1$$

vorhanden, wenn wir die Integrationen über alle Elemente ds_0 und ds_1 der begrenzenden Kugelcalotte bezw. des Kegelmantels erstrecken, und unter g_0 und g_1 die in (7.) angegebenen Werthe verstehen.

Die Formen der Vielflache.

(Von Herrn *O. Hermes* in Steglitz.)

Zweiter Theil der Abhandlung Band 120, Seite 27—59.

Hierzu Figurentafel I.

B. Die Vielflache im allgemeinen.

§ 14. Aus einem Vielflach V mit beliebig vielkantigen Ecken, einem allgemeinen Vielflach*), erhält man ein Vielflach V_0 mit durchweg dreikantigen Ecken, ein einfaches Vielflach, wenn man jede mehrkantige Ecke durch einen ebenen Schnitt abstumpft. Bei diesem Verfahren treten an Stelle einer jeden m-kantigen Ecke von V m dreikantige Ecken des neuen Vielflachs V_0, während eine Fläche und m Kanten hinzukommen, so dass, dem *Euler*schen Satze entsprechend, der Ausdruck $(e+f-k)$ denselben Werth beibehält.

Hat also V unter seinen e Ecken ausser dreikantigen noch μ Ecken von bezüglich $m_1, m_2, m_3, \ldots, m_\mu$ Kanten, wo unter den Zahlen m auch einander gleiche vorkommen können, und stumpft man diese μ Ecken je durch einen ebenen Schnitt ab, so ergiebt sich das einfache Vielflach V_0, und die Anzahl seiner Ecken wird:

$$e_0 = e+(m_1-1)+(m_2-1)+\cdots+(m_\mu-1) = e+\Sigma m-\mu,$$

wenn Σm die Gesammtanzahl der Kanten aller mehr als dreikantigen Ecken und μ die Anzahl dieser Ecken bezeichnen. Ebenso ergiebt sich für die Flächenzahl f_0 von V_0:

$$f_0 = f+\mu.$$

Weil aber V_0 nunmehr nur dreikantige Ecken hat, findet (§ 1) zwischen e_0 und f_0 die Beziehung statt:

$$e_0 = 2f_0-4,$$

*) *V. Eberhard* nennt in seiner *Morphologie der Polyeder* ein convexes Polyeder *allgemein*, wenn in jeder Ecke genau drei, *singulär*, wenn auch nur in einer Ecke mehr als drei seiner Grenzflächen zusammenstossen.

es ist also:

$$e+\Sigma m-\mu = 2f+2\mu-4,$$

oder:

$$\text{(I.)} \qquad 2f-e = \Sigma m-3\mu+4.$$

Der *reciprok-polare Satz* wird:

$$\text{(II.)} \qquad 2e-f = \Sigma n-3\nu+4,$$

wenn Σn die Gesammtzahl der Kanten aller mehr als dreikantigen Flächen und ν die Anzahl dieser Flächen bezeichnen.

Die Sätze (I.) und (II.) sind nur besondere Formen für den *Euler*schen Satz. Wenn man nämlich in dem Satze (I.) Σm und μ zugleich auf die dreikantigen Ecken ausdehnt, für welche Σm und μ den gleichen Werth haben, so wird Σm die Summe der Kantenzahlen aller Ecken des Vielflachs V, also die doppelte Kantenzahl $2k$, und μ die Anzahl sämmtlicher Ecken, d. i. e, also wird der Satz (I.):

$$2f-e = 2k-3e+4, \quad \text{oder} \quad e+f = k+2,$$

der *Euler*sche Satz. Gleiches gilt natürlich für den Satz (II.), wenn Σn auch auf die Dreiecke ausgedehnt wird und ν auf alle Flächen, so dass es durch f ersetzt werden kann.

§ 15. Umgekehrt kann man sich die Vielflache V als aus den Vielflachen V_0 entstanden vorstellen, indem man die einer jeden mehrkantigen Fläche N benachbarten n Flächen, d. h. welche mit ihr je eine Kante gemeinschaftlich haben, über N hinaus erweitert und dabei die Annahme macht, dass diese erweiterten n Ebenen durch denselben Punkt gehen. — Diese Annahme ist statthaft, ohne die Allgemeinheit der Schlüsse über Ecken-, Flächen- und Kantenzahl des gegebenen Vielflachs einzuschränken, und durch eine Drehung der Nachbarflächen, um ihre mit N gemeinschaftlichen Kanten zu erreichen. — Unter dieser Voraussetzung lässt sich das zur Bildung eines Vielflachs V mit mehrkantigen Ecken aus einem einfachen Vielflach V_0 führende Verfahren kurz dahin deuten, dass man über jeder mehrkantigen Fläche N_0 von V_0 als Grundfläche durch Erweiterung der n_0 Nachbarflächen eine n_0-seitige Pyramide errichtet. Dadurch verliert V_0 jedesmal eine n_0-kantige Fläche, sowie n_0 Kanten und n_0 dreikantige Ecken, gewinnt aber dafür eine n_0-kantige Ecke, sodass $(e_0+f_0-k_0)$, wie bei dem Verfahren in § 14, ungeändert bleibt.

Weil nun bei dieser Herstellung von Pyramiden über jeder mehr als

dreikantigen Fläche N_0 von V_0 die erweiterten Nachbarfiguren je eine Ecke verlieren, so sind bei dem Verfahren alle diejenigen Flächen N_0 auszuschliessen, denen ein oder mehrere Dreiecke benachbart sind. Ferner ist darauf zu achten, dass nicht bei Erweiterung der Nachbarflächen von N_0 eine derselben auf eine frühere übergreift, wodurch die sämmtlichen Seitenflächen der Pyramide in eine Ebene zu liegen kommen, also eine ebene Figur bilden würden (§ 16, 3). Ein solcher Fall würde eintreten, wenn N_0 eine Seitenfläche eines Vielflachs V_0 ohne Deckfläche, also der nullten Ordnung (§ 2), wäre oder an einer freien Deckkanten- oder an einer Zwischenkantenverbindung liegen sollte.

Bemerkt sei noch, dass nur über Flächen N_0 mit durchweg dreikantigen Ecken Pyramiden errichtet werden durch Erweiterung der Nachbarflächen, wie auch in § 14 eine mehrkantige Ecke nur beseitigt wird durch Abstumpfung vermittelst einer Ebene, welche die sämmtlichen Kanten der Ecke durchschneidet, ohne durch einen Endpunkt einer derselben zu gehen. Es kann dann an demselben Vielflach V_0 das Erweiterungsverfahren so oft wiederholt werden, als an dem Vielflach noch eine Fläche N_0 mit durchweg dreikantigen Ecken sich vorfindet (§ 16). —

Die schematischen Kantenfiguren der einfachen Vielflache (§ 4) und die ihnen zugehörigen Flächenformeln (§ 3) reichen, abgesehen von einigen Aenderungen, zur Darstellung der allgemeinen Vielflache V aus.

§ 16. ***Darstellung der Vielflache V.*** 1. Gegeben sei das ***einfache Achtflach*** (Fig. 29):

29. $(6;\ 4, 5, 3, 5, 4_1, 4_2;\ 5_3),$

wo die durchweg von mehrkantigen Figuren eingeschlossenen beiden letzten Seitenvierecke und die Deckfläche in der Kantenfigur durch 1, 2, 3, in der Flächenformel durch die entsprechenden Stellenzeiger bezeichnet sind.

Wird zuerst das Viereck 1 beseitigt, so entsteht das Siebenflach 29_1, das an Stelle des Vierecks 1 eine vierkantige Ecke erhalten hat, die in der Kantenfigur durch die Zahl 4_1 ***innerhalb des zugehörigen Winkels*** (oder durch den Winkelbogen mit ausserhalb angeschriebener 4_1) angedeutet wird (vgl. die fertiggestellte Figur 29_1,a). In der Flächenformel soll das fortgefallene Viereck durch $\bar{4}_1$, also durch die oben mit einem Strich versehene Kantenzahl ersetzt werden, so dass durch das Zeichen $\bar{4}_1$ zugleich die vierkantige Ecke, welche an die Stelle des Vierecks 4_1 getreten ist, bezeichnet wird.

Der Stellenzeiger 1, der Beseitigung der ersten Fläche entsprechend, ist auch jeder durch dieses Verfahren in ihrer Seitenzahl um eins verringerten Fläche, den Nachbarflächen also, d. h. den beiden anliegenden Seitenfiguren, der Grundfläche und der Deckfläche, beigefügt. Demnach wird die zugehörige Flächenformel:

29_1. $(5_1;\ 4,\ 5,\ 3,\ 4_1,\ \overline{4}_1,\ 3_1;\ 4_1)$.

Zu beachten ist bei dieser Bezeichnung, dass die Anzahl der Indices an den Flächenzahlen (vier) mit der Kantenzahl der weggefallenen Fläche, also auch der neu eintretenden Ecke, übereinstimmen muss, ferner dass diese Ecke $\overline{4}_1$, weil auch die Grundfläche mit dem Stellenzeiger 1 versehen ist, zugleich der Grundfläche angehört, als *Grundecke* zu bezeichnen ist. Von diesen Grundecken sind, wie sich weiterhin (§ 26) zeigen wird, die der Grundfläche nicht anliegenden Ecken, die *Seitenecken* und die *Oberecken* (§ 35), wesentlich zu unterscheiden. In den Flächenformeln gehören die Grundecken der Reihe der Seitenflächen, die Seitenecken und Oberecken der Reihe der Deckflächen an.

Wird bei einer anderen, durch den Index 2 angedeuteten Reduction das Seitenviereck 2 des Achtflachs 29 durch die vierkantige Ecke $\overline{4}_2$ ersetzt, so ergiebt sich das Siebenflach 29_2:

29_2. $(5_2;\ 3_2,\ 5,\ 3,\ 5,\ 3_2,\ \overline{4}_2;\ 4_2)$,

dessen vierkantige Ecke $\overline{4}_2$ ebenfalls eine Grundecke und demnach durch 4_2 innerhalb der Kantenfigur angedeutet ist. Ebenso entsteht ein drittes Siebenflach 29_3 bei Beseitigung der Deckfläche 3 aus dem gegebenen Achtflach:

29_3. $(6;\ 3_3,\ 4_3,\ 3,\ 4_3,\ 3_3,\ 3_3;\ \overline{5}_3)$,

in welchem die fünfkantige Ecke $\overline{5}_3$ als *Seitenecke* zu bezeichnen ist (ausgeführt in Fig. 29_3,a).

Wird das Achtflach 29 auf eine seiner fünfkantigen Seitenflächen, etwa auf die Fläche 4 (Fig. 29), als Grundfläche bezogen (§ 11), so dass seine Flächenformel wird:

29_4. $(5;\ 5,\ 5,\ 3,\ 6,\ 4;\ 4,\ 4)$. (Fig. 29_4),

so ergiebt sich durch Beseitigung des ersten Deckvierecks 5 das Siebenflach:

29_5. $(5;\ 4_5,\ 5,\ 3,\ 5_5,\ 3_5;\ \overline{4}_5,\ 3_5)$.

Dieses Siebenflach (Fig. 29_5, 29_5,*a*) ist nur eine andere Darstellung des Siebenflachs 29_2, weil in der Kantenfigur 29_4 das Viereck 5 mit dem Viereck 2 der Kantenfigur 29 übereinkommt. Die Ecke $\overline{4}_5$ des Siebenflachs 29_5,

ist keine Grundecke, so dass zu ihrer Vervollständigung ein dem Deckdreieck gegenüberliegendes Seitendreieck gehört (Fig. 29_5,*a*), das mit dem Deckdreieck nur einen Eckpunkt gemeinschaftlich hat. Die Ecke $\bar{4}_5$ ist also eine ***Seitenecke*** des Siebenflachs und zur Unterscheidung von einer Grundecke in der Kantenfigur durch die Zahl $\bar{4}_5$ ***ausserhalb des zugehörigen Winkels*** bezeichnet. Ein Gleiches gilt für die ***Bezeichnung der mehrkantigen Seitenecken*** überhaupt.

Durch Beseitigung des Vierecks 6 (Fig. 29_4) endlich entsteht das Siebenflach

29_6. $(5;\ 4_6,\ 4_6,\ 3,\ 5_6,\ 4;\ 3_6,\ \bar{4}_6)$ (Fig. 29_6 und 29_6,*a*),

in dessen Kantenfigur die Lage der die vierkantige Seitenecke $\bar{4}_6$ ergänzenden Seitenkante durch einen Punkt angedeutet ist. Derartige Punkte zum Ersatz von für die Figur entbehrlichen Seitenecken sind bei mehrkantigen Seitenecken oft anzuwenden. —

2. ***Reduction des Neunflachs:***

30. $(5;\ 5,\ 4_2,\ 5,\ 5,\ 4;\ 5_1,\ 5,\ 4_2)$ (Fig. 30).

Dieses Neunflach zeigt sich zunächst als in seiner Darstellung unabhängig von der Auswahl seiner Grundfläche aus seinen sechs Fünfecken, weil jedes derselben von der Figurengruppe (5, 4, 5, 5, 4) umgeben ist. Ausserdem haben auch die drei Vierecke relativ dieselbe Lage, weil jedes von vier Fünfecken eingeschlossen ist. Um also zu verschiedenen Achtflachen zu gelangen, hat man nur ein beliebiges Fünfeck oder Viereck zu beseitigen.

Die Beseitigung des Fünfecks 1 führt zu dem Achtflach:

30_1. $(5;\ 4_1,\ 4,\ 5,\ 4_1,\ 3_1;\ \bar{5}_1,\ 4_1,\ 3_1)$,

die des Vierecks 2 zu dem Achtflach:

30_2. $(5;\ 5,\ 4,\ 4_2,\ 4_2,\ 4;\ 4_2,\ \bar{4}_2,\ 4_2)$,

zu deren Darstellung die Kantenfiguren 30_1 und 30_2 ausreichen.

Es sei hierbei bemerkt, dass durch die Stellenzeiger an den Flächenzahlen angedeutet wird, dass an der entsprechenden Fläche des Vielflachs eine mehr als dreikantige Ecke liegt, so dass also nur die den Zahlen ohne Index zugehörigen Flächen, ***die freien Flächen,*** ringsum von dreikantigen Ecken umgeben sind. Nur freie Flächen gestatten einen Ersatz durch gleichvielseitige Pyramiden (§ 15).

Nunmehr lässt sich weiter am Achtflach 30_1 das freie Seitenviereck beseitigen, so dass sich das *Siebenflach:*

30_{13}. $(4_3;\ 3_{13},\ \overline{4}_3,\ 4_3,\ 4_1,\ 3_1;\ \overline{5}_1,\ 3_{13},\ 3_1)$

ergiebt, dessen vierkantige Ecke $\overline{4}_3$ Grundecke ist (Fig. 30_{13}). Das Achtflach 30_2, welches zwei Seitenvierecke enthält, gestattet sogar eine doppelte Reduction, durch welche sich zunächst das *Siebenflach* 30_4 mit der Grundecke $\overline{4}_4$:

30_4. $(4_4;\ 4_4,\ \overline{4}_4,\ 3_{24},\ 4_2,\ 4;\ 4_2,\ \overline{4}_2,\ 3_{24})$ (Fig. 30_{24})

und endlich das *Sechsflach* 30_{45} mit den beiden Grundecken $\overline{4}_4$ und $\overline{4}_5$ und der Seitenecke $\overline{4}_2$ ergiebt:

30_{45}. $(3_{45};\ 3_{45},\ \overline{4}_4,\ 3_{24},\ 3_{25},\ \overline{4}_5;\ 3_{25},\ \overline{4}_2,\ 3_{24})$ (Fig. 30_{245}).

Dieses Sechsflach ist schliesslich das von *Steiner* unter Nr. 1 angedeutete. Es wird von sechs Dreiecken eingeschlossen, die in drei vierkantigen und zwei dreikantigen Ecken zusammenstossen (*dreiseitige Doppelpyramide*).

Die Reihenfolge der Reductionen 2, 4, 5 ist willkürlich, so dass auch eine Aenderung in der Reihenfolge der mehrfachen Indices der Flächenzahlen in der letzten Flächenformel bedeutungslos ist. Das Gleiche findet allgemein statt.

3. Am *Neunflach:*

31. (7; 4, 5, 5, 3, 4, 6, 4; 4) (Fig. 31)

lässt sich weder das erste Fünfeck noch das Sechseck durch Reduction beseitigen, obgleich beide Figuren von mehrkantigen Flächen eingeschlossen sind, weil in beiden Fällen die Grundfläche mit mehr als zwei Nachbarflächen der zu beseitigenden Figur eine Kante gemeinschaftlich hat. — Durch Beseitigung der Deckfläche ergiebt sich das *Achtflach:*

31_1. $(7;\ 3_1,\ 4_1,\ 5,\ 3,\ 4,\ 5_1,\ 3_1;\ \overline{4}_1)$,

durch Fortschaffung eines der Deckfläche benachbarten Seitenvierecks das *Achtflach:*

31_2. $(6_2;\ 3_2,\ 5,\ 5,\ 3,\ 4,\ 5_2,\ \overline{4}_2;\ 3_2)$.

§ 17. Ist von einem Vielflach V die Flächenformel gegeben, so lässt sich die Kantenfigur herstellen und die Zurückführung auf ein einfaches Vielflach an der Formel verfolgen. Es handle sich beispielsweise um die Flächenformel:

32. $(6_{24};\ 3_{12},\ 3_1,\ 4_{14},\ \overline{4}_4,\ 3_{34},\ 3_3,\ 3_{23},\ \overline{4}_2;\ 4_{123},\ \overline{4}_1,\ \overline{5}_3,\ 3_{34})$.

Dieselbe gehört zu einem ***Neunflach*** mit den drei vierkantigen Ecken $\bar{4}_1$, $\bar{4}_2$, $\bar{4}_4$ und der fünfkantigen Ecke $\bar{5}_3$, von denen $\bar{4}_2$ und $\bar{4}_4$ Grundecken sind. Die Grundfläche ist ein Sechseck mit den vierkantigen Ecken $\bar{4}_2$ und $\bar{4}_4$, die bezüglich zwischen den Seitenflächenpaaren (3_{23}, 3_{12}) und (4_{14}, 3_{34}) liegen. Die beiden Deckflächen sind das Viereck 4_{123} und das Dreieck 3_{34}. Die Kantenfigur besteht nur aus diesen beiden Figuren, welche die fünfkantige Ecke $\bar{5}_3$ und eine Kante gemeinschaftlich haben. (Fig. 32.)

Um das einfache Vielflach zu erhalten, aus dem man sich das Neunflach 32 als (nach dem Verfahren in § 14) entstanden vorstellen kann, beseitige man durch Abstumpfung der Reihe nach die mehrkantigen Ecken, etwa zuerst die Seitenecke $\bar{5}_3$, indem man sie durch ein Fünfeck ersetzt und die in ihr zusammenstossenden, also mit dem Stellenzeiger 3 versehenen Flächen, je in der Kantenzahl um 1 vermehrt, so dass sich die Flächenformel:

32_1. $(6_{24};\ 3_{12}, 3_1, 4_{14}, \bar{4}_4, 4_4, 4, 4_2, \bar{4}_2;\ 5_{12}, \bar{4}_1, 5, 4_4)$ (Fig 32_1)

ergiebt; weiter erhält man aus dieser durch Abstumpfung der Grundecke $\bar{4}_4$:

32_2. $(7_2;\ 3_{12}, 3_1, 5_1, 4, 5, 4, 4_2, \bar{4}_2;\ 5_{12}, \bar{4}_1, 5, 5)$ (Fig. 32_2),

durch Abstumpfen der Grundecke $\bar{4}_2$:

32_3. $(8;\ 4_1, 3_1, 5_1, 4, 5, 4, 5, 4;\ 6_1, \bar{4}_1, 5, 5)$ (Fig. 32_3),

endlich durch Abstumpfen der Seitenecke $\bar{4}_1$:

32_4. $(8;\ 5, 4, 6, 4, 5, 4, 5, 4;\ 7, 4, 5, 5)$ (Fig. 32_4),

die Flächenformel eines ***einfachen Dreizehnflachs***, die sich leicht auch unmittelbar aus der Formel 32 hätte ableiten lassen (vergl. §§ 25 und 36).

Zugleich ist aus diesem Verfahren der Abstumpfung der mehrkantigen Ecken der Schluss zu ziehen, dass ein Vielflach V mit beliebig vielkantigen Ecken aus einem einfachen Vielflach V_0 herzustellen ist, dessen Flächenzahl um die Anzahl der mehrkantigen Ecken von V grösser ist, als die Flächenzahl von V.

§ 18. ***Kantenfiguren der Vielfache V.*** Nach dem Verfahren in § 16 lassen sich leicht aus den einfachen Vielflachen V_0 Vielflache V von geringerer Flächenzahl herleiten und demnach lässt sich auch aus einem Verzeichniss der ersteren ein Verzeichniss der letzteren zusammenstellen, allerdings mit der Einschränkung, dass die Gesammtzahl der Flächen und mehrkantigen Ecken der sich ergebenden Vielflache V höchstens der Flächenzahl der zugrundeliegenden einfachen Vielflache V_0 gleichkommt (§ 17).

Die Anzahl der mehrkantigen Ecken eines Vielflachs ist am grössten, wenn die Ecken durchweg vierkantig sind, und unter dieser Annahme ergiebt sich nach § 14, wenn e_4 die Anzahl der vierkantigen Ecken des Vielflachs bedeutet:

$$2f - e_4 = 4e_4 - 3e_4 + 4 \quad \text{d. i.} \quad e_4 = f - 2.$$

In der That hat für $f = 8$ die vierseitige Doppelpyramide die meisten nämlich sechs vierkantige Ecken. Für $f = 4, 5, 6, 7$ ist bezüglich die höchste Anzahl der vierkantigen Ecken gleich 0, 1, 3, 4. Demnach würden zur Herstellung der Vielflache V für $f = 5, 6, 7, 8$ die einfachen Vielflache V_0 bis einschliesslich $f = 6, 9, 11, 14$ in Betracht zu ziehen sein, was bei der übergrossen Anzahl der letzteren (vgl. § 13) nicht ausführbar ist, abgesehen von dem weiteren Uebelstande, dass die sich ergebenden Vielflache V wiederholt zur Darstellung gelangen würden.

Trotzdem führt eine derartige Reduction der Vielflache V_0 auch bei geringerer Flächenzahl wenigstens zur ***Bestimmung der Hauptformen der Vielflache im allgemeinen*** V, bis zu den Sieben- und Achtflachen mit einer und mit zwei mehrkantigen Ecken, und diese Formen genügen zu weiteren Schlüssen über den Zusammenhang unter den Formen der Vielflache überhaupt. Im Besonderen zeigt sich bei den Kantenfiguren der Vielflache V, abgesehen von den Bezeichnungen der mehrkantigen Ecken, eine vollständige Uebereinstimmung mit den Kantenfiguren der Vielflache V_0. Jedoch verlieren die bei der Bildung dieser Vielflache geltenden Ausnahmen bei den Vielflachen V ihre Bedeutung, so dass für diese auch Kantenfiguren vorkommen, in denen Dreiecke eine Kante oder Deckfiguren nur eine Ecke gemeinschaftlich haben, u. s. w. —

In dem *Verzeichnis* II (§ 19 — § 23) sind die Vielflache V_0 und V mit Einschluss der Siebenflache, vollständig aufgeführt, und zwar auch für Grundflächen mit geringerer Kantenzahl, weil die zugehörigen Flächenformeln für eine spätere leichte Uebersicht (§§ 29—33) gleiche Bedeutung erhalten, wie die Normalformeln. Leider hat dem zugleich angeschlossenen Verzeichniss der allgemeinen Achtflache nicht eine gleiche Ausdehnung gegeben werden können. Es ist von jedem Achtflach nur eine einzige Form zur Darstellung gekommen. Die Vielflache sind einfach am Fussende der Seiten nummeriert, ohne Rücksicht darauf, ob sie in ihrer Normalform aufgeführt werden oder nicht.

Die Veröffentlichung des vollständigen Verzeichnisses der Vielflache V, mit Einschluss der Achtflache, unter Beifügung der Figuren, bleibt vorbehalten. Die Tabelle in § 36 bezieht sich bereits auf eine derartige Zusammenstellung.

Verzeichnis II der Vielflache im allgemeinen, mit Einschluss der Achtflache.

§ 19. *Die einfachen Vielflache V_0:*

(IV_0.) A. $f = 4$.

1. (3; 3, 3, 3) (Fig. 1).

(V_0.) B. $f = 5$.

Ohne Deckfläche.

1. (4; 3, 4, 3, 4) (Fig. 2).

Mit Deckfläche.

1_a. (3; 4, 4, 4; 3) (Fig. 36).

(VI_0.) C. $f = 6$.

a. Ohne Deckfläche.

1. (5; 3, 4, 4, 3, 5) (Fig. 3).

b. Mit einer Deckfläche.

2. (4; 4, 4, 4, 4; 4) (Fig. 4).
1_a. (4; 5, 3, 5, 4; 3).

c. Mit zwei Deckflächen.

1_b. (3; 5, 5, 4; 4, 3) (Fig. 34).

(VII_0.) D. $f = 7$.

a. Ohne Deckfläche.

1. (6; 3, 4, 4, 4, 3, 6) (Fig. 5).
2. (6; 3, 4, 5, 3, 4, 5) (Fig. 6).
3. (6; 3, 5, 3, 5, 3, 5) (Fig. 7).

b. Mit einer Deckfläche.

4. (5; 4, 4, 4, 4, 4; 5) (Fig. 8).
5. (5; 4, 5, 3, 5, 4; 4) (Fig. 9).
3_a. (5; 3, 5, 5, 3, 6; 3).
2_a. (5; 5, 4, 3, 6, 4; 3).

1—14.

(VII$_0$.)

c. Mit zwei Deckflächen.

4_a. (4; 5, 4, 5, 4; 4, 4).
5_a. (4; 4, 5, 5, 4; 5, 3).
1_a. (4; 6, 3, 6, 4; 4, 3).
2_b. (4; 5, 6, 3, 5; 4, 3).
1_b. (4; 6, 4, 6, 4; 3–3).

d. Mit drei Deckflächen.

5_b. (3; 5, 5, 5; 4, 4, 4).
2_c. (3; 6, 5, 4; 5, 3, 4).
1_c. (3; 6, 6, 4; 4, 4, 3).
3_b. (3; 5, 5, 6; 3, 5, 3) (Fig. 33).

(VIII$_0$.)

E. $f = 8$.

a. Ohne Deckfläche.

1. (7; 3, 4, 4, 4, 4, 3, 7) (Fig. 12).
2. (7; 3, 4, 4, 5, 3, 4, 6) (Fig. 13).
3. (7; 3, 4, 5, 4, 3, 5, 5) (Fig. 14).
4. (7; 3, 4, 5, 3, 5, 3, 5) (Fig. 15).

b. Mit einer Deckfläche.

5. (6; 4, 4, 4, 4, 4, 4; 6) (Fig. 16).
6. (6; 4, 5, 3, 5, 4, 4; 5) (Fig. 17).
7. (6; 5, 3, 6, 3, 5, 4; 4) (Fig. 18).
8. (6; 5, 3, 5, 5, 3, 5; 4) (Fig. 19).
9. (6; 4, 5, 4, 3, 6, 4; 4) (Fig. 20).
10. (6; 3, 6, 3, 6, 3, 6; 3) (Fig. 21).
11. (6; 3, 6, 4, 3, 6, 5; 3) (Fig. 22).
4_a. (6; 5, 4, 3, 7, 3, 5; 3).
2_a. (6; 5, 4, 4, 3, 7, 4; 3) (Fig. 13_a).
12. (6; 5, 5, 3, 4, 6, 4; 3) (Fig. 23).
11_a. (6; 6, 3, 5, 3, 6, 4; 3) (Fig. 22_a).

c. Mit zwei Deckflächen.

13. (5; 5, 4, 4, 5, 4; 4, 5) (Fig. 24).
6_a. (5; 4, 5, 5, 4, 4; 6, 3).
6_b. (5; 5, 5, 3, 6, 4; 4, 4) (Fig. 29_4).
7_a. (5; 4, 6, 3, 6, 4; 5, 3).
8_a. (5; 4, 5, 6, 3, 5; 5, 3).
14. (5; 3, 5, 5, 5, 5; 5, 3) (Fig. 25).
11_b. (5; 3, 6, 6, 3, 6; 4, 3) (Fig. 22_b).

---

15 — 45.

(VIII$_{0}$)

c. Mit zwei Deckflächen.

4_b. (5; 6, 3, 7, 3, 5; 4, 3).
12_a. (5; 5, 6, 4, 3, 6; 4, 3).
3_b. (5; 5, 7, 3, 4, 5; 4, 3).
2_b. (5; 6, 4, 3, 7, 4; 4, 3) (Fig. 13_b).

9_a. (5; 6, 4, 4, 6, 4; 3−4).
4_c. (5; 6, 5, 3, 7, 4; 3−3).
3_a. (5; 5, 5, 4, 7, 4; $3\underset{2}{-}3$).

d. Mit drei Deckflächen.

13_a. (4; 5, 5, 5, 4; 5, 4, 4).
6_c. (4; 6, 4, 5, 4; 5, 3, 5).
9_b. (4; 6, 5, 4, 4; 6, 3, 4).

5_a. (4; 6, 4, 6, 4; 4, 4, 4).
6_d. (4; 5, 6, 6, 4; 4, 5, 3).
9_c. (4; 4, 6, 6, 4; 5, 4, 3).
8_b. (4; 5, 5, 5, 5; 3, 6, 3).
7_b. (4; 6, 5, 4, 5; 3, 6, 3).

9_d. (4; 6, 3, 6, 5; 4, 4, 4).
12_b. (4; 6, 6, 3, 5; 5, 3, 4).
3_c. (4; 3, 7, 5, 5; 5, 3, 4).
2_c. (4; 7, 3, 6, 4; 5, 3, 4) (Fig. 13_d).

1_a. (4; 7, 3, 7, 4; 4, 4, 3).
2_d. (4; 6, 7, 3, 5; 4, 4, 3) (Fig. 13_c).
11_c. (4; 6, 6, 3, 6; 3, 5, 3) (Fig. 22_c).
4_d. (4; 7, 3, 6, 5; 3, 5, 3).

1_b. (4; 7, 4, 7, 4; 4, 3−3).
2_c. (4; 5, 6, 4, 7; 3, 4−3) (Fig. 13_e).

e. Mit vier Deckflächen.

14_a. (3; 5, 5, 5; 5, 5, 5; 3).
12_c. (3; 6, 5, 4; 6, 4, 5; 3).

6_e: (3; 5, 5, 6; 4, 5, 4, 4).
9_e: (3; 6, 6, 4; 5, 4, 4, 4).
8_c: (3; 5, 5, 6; 5, 4, 5, 3).

---

46 — 75.

(VIII$_0$.) e. Mit vier Deckflächen.

3_d: (3; 5, 4, 7; 5, 5, 4, 3).
2_f: (3; 7, 4, 5; 4, 4, 3, 6) (Fig. 13_f).
11_d: (3; 6, 6, 4; 6, 3, 5, 3) (Fig. 22_d).

7_c: (3; 6, 5, 6; 3, 5, 4, 4).
2_g: (3; 7, 6, 4; 4, 5, 3, 4) (Fig. 13_g).
4_e: (3; 7, 6, 4; 5, 3, 5, 3).
11_e: (3; 6, 6, 5; 3, 6, 3, 4) (Fig. 22_e).
4_f: (3; 5, 5, 7; 3, 6, 3, 4).

1_c. (3; 7, 7, 4; 4, 4, 4, 3).
4_g. (3; 5, 6, 7; 3, 5, 4, 3).
10_a. (3: 6, 6, 6; 3, 6, 3, 3).

Gesammtzahl der Vielflache V_0: 1 Vierflach, 1 Fünfflach, 2 Sechsflache, 5 Siebenflache, 14 Achtflache.

§. 20. *Die Vielflache mit einer mehrkantigen Ecke* V_1.

(V$_1$.) A. $f = 5$.

1. $(4;\ 3_1,\ 3_1,\ 3_1,\ 3_1;\ \overline{4_1})$. (Ohne Deckfläche.)

1_a. $(3_1;\ 3_1,\ \overline{4_1},\ 3_1,\ 4;\ 3_1)$. (Mit Deckfläche) (Fig. 36_a).

(VI$_1$.) B. $f = 6$.

a. Ohne Deckfläche.

1. $(5;\ 3_1,\ 3_1,\ 3_1,\ 3_1,\ 3_1;\ \overline{5_1})$.
2. $(5;\ 3,\ 4_1,\ 3_1,\ 3_1,\ 4_1;\ \overline{4_1})$.

b. Mit einer Deckfläche.

3. $(4_1;\ \overline{4_1},\ 3_1,\ 4,\ 4,\ 3_1;\ 4_1)$.
2_a. $(4_1;\ \overline{4_1},\ 4_1,\ 3,\ 5,\ 3_1;\ 3_1)$.
3_a. $(4;\ 4_1,\ 3_1,\ 4_1,\ 4;\ 3_1,\ \overline{4_1})$ (Fig. 36_b).

c. Mit zwei Deckflächen.

3_b. $(3_1;\ 4_1,\ \overline{4_1},\ 4_1,\ 4;\ 4,\ 3_1)$.
2_b. $(3_1;\ \overline{4_1},\ 4_1,\ 5,\ 3_1;\ 4_1,\ 3)$.
2_c. $(3;\ 4_1,\ 4_1,\ 5;\ 3_1,\ \overline{4_1},\ 3_1)$.
1_a. $(3_1;\ 3_1,\ \overline{5_1},\ 3_1,\ 5,\ 3_1,\ 3_1)$.

76—97.

(VII$_1$.)

C. $f = 7$.

a. Ohne Deckfläche.

1. $(6;\ 3_1,\ 3_1,\ 3_1,\ 3_1,\ 3_1,\ 3_1;\ \overline{6_1})$.
2. $(6;\ 3,\ 4_1,\ 3_1,\ 3_1,\ 3_1,\ 4_1;\ \overline{5_1})$ (Fig. 29_2).
3. $(6;\ 3,\ 4_1,\ 3_1,\ 4_1,\ 3,\ 5_1;\ \overline{4_1})$.
4. $(6;\ 3,\ 4_1,\ 4_1,\ 3,\ 4_1,\ 4_1;\ \overline{4_1})$.
5. $(6;\ 3,\ 4,\ 4_1,\ 3_1,\ 3,\ 5_1;\ \overline{4_1})$.

b. Mit einer Deckfläche.

(g_4).*)

6. $(5_1;\ 4,\ 3_1,\ \overline{4_1},\ 3_1,\ 4,\ 4;\ 5_1)$.
7. $(5_1;\ \overline{4_1},\ 3_1,\ 5,\ 3,\ 5,\ 3_1;\ 4_1)$ (Fig. 29_2).
8. $(5_1;\ \overline{4_1},\ 3_1,\ 4,\ 5,\ 3,\ 4_1;\ 4_1)$ (Fig. 29_1).

3_a. $(5_1;\ 3,\ 4_1,\ \overline{4},\ 4_1,\ 3,\ 6;\ 3_1)$.

5_a. $(5_1;\ \overline{4_1},\ 4_1,\ 4,\ 3,\ 6,\ 3_1;\ 3_1)$.

9. $(5_1;\ 5,\ 4,\ 3,\ 5_1,\ 4_1,\ 3_1,\ 3_1)$.

(s_4).

10. $(5;\ 4,\ 4_1,\ 3_1,\ 4_1,\ 4;\ 4_1,\ \overline{4_1})$.

7_a. $(5;\ 5,\ 3,\ 5_1,\ 3_1,\ 4_1;\ 3_1,\ \overline{4_1})$ (Fig. 29_5).

8_a. $(5;\ 4_1,\ 4_1,\ 3,\ 5_1,\ 4;\ 3_1,\ \overline{4_1})$ (Fig. 29_6).

9_a. $(5;\ 5_1,\ 3_1,\ 3_1,\ 5_1,\ 4;\ 3 - \overline{4_1})$.

(s_5).

11. $(5;\ 4_1,\ 3_1,\ 3_1,\ 4_1,\ 4;\ 3_1,\ \overline{5_1})$ (Fig. 36_c).

c. Mit zwei Deckflächen.

(g_4).

10_a. $(4_1;\ \overline{4_1},\ 4_1,\ 4,\ 5,\ 3_1;\ 4_1,\ 4)$.

7_b. $(4_1;\ \overline{4_1},\ 3_1,\ 5,\ 5,\ 3_1;\ 5_1,\ 3)$.

8_b. $(4_1;\ 4,\ 5,\ 4_1,\ \overline{4_1},\ 3_1;\ 5_1,\ 3)$.

10_b. $(4_1;\ 4,\ 4_1,\ 4_1,\ 4_1,\ 4;\ 5,\ 3_1)$.

3_b. $(4_1;\ 6,\ 3,\ 5_1,\ \overline{4_1},\ 3_1;\ 4_1,\ 3)$.

8_c. $(4_1;\ 4_1,\ \overline{4_1},\ 5_1,\ 3,\ 5;\ 4,\ 3_1)$.

4_a. $(4_1;\ \overline{4_1},\ 4_1,\ 6,\ 3,\ 4_1;\ 4_1,\ 3)$.

5_b. $(4_1;\ 6,\ 4,\ 5_1,\ \overline{4_1},\ 3_1;\ 3_1 - 3)$.

---

98 – 121.

*) (g_n) bedeutet mit „mit n-kantiger Grundecke“, (s_n) „mit n-kantiger Seitenecke“.

$(VII_1.)$

c. Mit zwei Deckflächen.

(g_5).

11_a. $(4_1;\ 3_1,\ \overline{5_1},\ 3_1,\ 5,\ 4;\ 4_1,\ 3_1)$ (Fig. 34_b).
2_a. $(4_1;\ 3_1,\ \overline{5_1},\ 4_1,\ 3,\ 6;\ 3_1,\ 3_1)$.

(s_4).

6_a. $(4;\ 5_1,\ 3_1,\ 5_1,\ 4;\ 4,\ 3_1,\ \overline{4_1})$.
10_c. $(4;\ 5,\ 4_1,\ 4_1,\ 4;\ 4_1,\ \overline{4_1},\ 3_1)$ (Fig. 34_a.)
8_d. $(4;\ 5,\ 5_1,\ 3_1,\ 4_1;\ \overline{4_1},\ 4_1,\ 3)$.
5_c. $(4;\ 4_1,\ 5_1,\ 3,\ 6;\ 3_1,\ \overline{4_1},\ 3_1)$.
9_b. $(4;\ 5_1,\ 3,\ 5_1,\ 5;\ 3_1,\ \overline{4_1},\ 3_1)$.
6_b. $(4;\ 5_1,\ 4,\ 5_1,\ 4;\ 3_1,\ \overline{4_1},\ 3_1)$.

(s_5).

11_b. $(4;\ 4_1,\ 3_1,\ 4_1,\ 5;\ 3_1,\ \overline{5_1},\ 3_1)$.

d. Mit drei Deckflächen.

(g_4).

10_d. $(3_1;\ 4_1,\ \overline{4_1},\ 4_1,\ 5;\ 4,\ 4_1,\ 4)$.
9_c. $(3_1;\ \overline{4_1},\ 5_1,\ 5,\ 3_1;\ 5_1,\ 3,\ 4)$.
8_e. $(3_1;\ 5_1,\ \overline{4_1},\ 4_1,\ 4;\ 5,\ 3,\ 4_1)$.
5_d. $(3_1;\ 6,\ 4_1,\ \overline{4_1},\ 3_1;\ 5_1,\ 3,\ 4)$.
6_c. $(3_1;\ 5_1,\ \overline{4_1},\ 5_1,\ 4;\ 4,\ 4,\ 3_1)$.
5_e. $(3_1;\ 6,\ 5_1,\ \overline{4_1},\ 3_1;\ 4_1,\ 4,\ 3)$.
3_c. $(3_1;\ 4_1,\ \overline{4_1},\ 4_1,\ 6;\ 3,\ 5_1,\ 3)$ (Fig. 33_a).
7_c. $(3_1;\ \overline{4_1},\ 4_1,\ 5,\ 5_1;\ 3_1,\ 5,\ 3)$ (Fig. 33_b).

(s_4).

8_f. $(3;\ 5_1,\ 4_1,\ 5;\ 4,\ 3_1,\ \overline{4_1},\ 4_1)$.
9_d. $(3;\ 5_1,\ 5_1,\ 4;\ 5,\ 3_1,\ \overline{4_1},\ 3_1)$.
4_b. $(3;\ 4_1,\ 4_1,\ 6;\ 4_1,\ \overline{4_1},\ 4_1,\ 3)$.
7_d. $(3;\ 5,\ 5,\ 5_1;\ 3_1,\ 4_1,\ 3_1,\ \overline{4_1})$ (Fig. 35).
5_f. $(3;\ 6,\ 5_1,\ 4;\ 4_1,\ 3_1,\ 3_1,\ \overline{4_1})$.
3_d. $(3;\ 4_1,\ 5_1,\ 6;\ 3_1,\ \overline{4_1},\ 4_1,\ 3)$.

122—144.

(VII$_1$.)

d. Mit drei Deckflächen.

(g_5).

11_c. $(3_1;\ 4_1,\ \overline{5}_1,\ 3_1,\ 5;\ \ 4,\ \ 3_1,\ 4_1)$.

11_d. $(3_1;\ 4_1,\ \overline{5}_1,\ 4_1,\ 4;\ \ 5,\ \ 3_1,\ 3_1)$.

2_b. $(3_1;\ 3_1,\ \overline{5}_1,\ 3_1,\ 6;\ \ 4_1,\ 4_1,\ 3)$.

2_c. $(3_1;\ 3_1,\ \overline{5}_1,\ 4_1,\ 6;\ \ 3_1,\ 4_1,\ 3)$.

(s_5).

2_d. $(3;\ 4_1,\ 4_1,\ 6;\ 3_1,\ 3_1,\ 3_1,\ \overline{5}_1)$.

(g_6.)

1_a. $(3_1;\ 3_1,\ \overline{6}_1,\ 3_1,\ 6;\ 3_1,\ 3_1,\ 3_1)$.

(VIII$_1$.)

D. $f = 8$.

a. Ohne Deckfläche.

1. $(7;\ 3_1,\ 3_1,\ 3_1,\ 3_1.\ 3_1,\ 3_1,\ 3_1;\ \overline{7}_1)$.
2. $(7;\ 3,\ \ 4_1,\ 3_1,\ 3_1,\ 3_1,\ 3_1,\ 4_1;\ \overline{6}_1)$.
3. $(7;\ 3,\ \ 4_1,\ 3_1,\ 3_1,\ 4_1,\ 3,\ \ 5_1;\ \overline{5}_1)$.
4. $(7;\ 3,\ \ 4_1,\ 3_1,\ 4_1,\ 3,\ \ 4_1,\ 4_1;\ \overline{5}_1)$.
5. $(7;\ 3,\ \ 4,\ \ 4_1,\ 3_1,\ 3_1,\ 3_1,\ 5_1;\ 5_1)$.
6. $(7;\ 3,\ \ 4,\ \ 4_1,\ 3_1,\ 4_1,\ 3,\ \ 6_1;\ \overline{4}_1)$.
7. $(7;\ 3,\ \ 4,\ \ 4,\ \ 4_1,\ 3_1,\ 3_1,\ 6_1;\ \overline{4}_1)$.
8. $(7;\ 3,\ \ 4,\ \ 5_1,\ 3_1,\ 3_1,\ 4_1,\ 5;\ \ \overline{4}_1)$.
9. $(7;\ 3,\ \ 4,\ \ 5_1,\ 3,\ \ 4_1,\ 3_1,\ 5_1;\ \overline{4}_1)$.
10. $(7;\ 3,\ \ 4,\ \ 4_1,\ 4_1,\ 3,\ \ 4_1,\ 5_1;\ \overline{4}_1)$.
11. $(7;\ 3,\ \ 5_1,\ 3,\ \ 5_1,\ 3,\ \ 4_1,\ 4_1;\ \overline{4}_1)$.
12. $(7;\ 3,\ \ 5_1,\ 3_1,\ 3_1,\ 5_1,\ 3,\ \ 5;\ \ \overline{4}_1)$.

b. Mit einer Deckfläche.

(g_4).

13. $(6_1;\ 4,\ \ 4,\ \ 3_1,\ \overline{4}_1,\ 3_1,\ 4,\ \ 4;\ \ 6_1)$.
14. $(6_1;\ 4,\ \ 5,\ \ 3,\ \ 4_1,\ 4_1,\ 3_1,\ 4;\ \ 5_1)$.
15. $(6_1;\ 4,\ \ 5,\ \ 3,\ \ 5,\ \ 3_1,\ \overline{4}_1,\ 3_1;\ 5_1)$.
16. $(6_1;\ \overline{4}_1,\ 4_1,\ 3,\ \ 6,\ \ 3,\ \ 5,\ \ 3_1;\ 4_1)$.

145—166.

$(\mathrm{VIII}_1.)$

b. Mit einer Deckfläche.

17. $(6_1;\ 5,\ 3,\ 4_1,\ \overline{4_1},\ 4_1,\ 3,\ 5;\ 4_1)$.
18. $(6_1;\ 5,\ 4,\ 3,\ 6,\ 3_1,\ \overline{4_1},\ 3_1;\ 4_1)$.
19. $(6_1;\ 3_1,\ \overline{4_1},\ 4_1,\ 4,\ 3,\ 6,\ 4;\ 4_1)$.
20. $(6_1;\ 4,\ 5,\ 4,\ 3,\ 5_1,\ \overline{4_1},\ 3_1;\ 4_1)$.

---

21. $(6_1;\ 3,\ 6,\ 4,\ 3,\ 5_1,\ \overline{4_1},\ 4_1;\ 3_1)$.
22. $(6_1;\ 5,\ 4,\ 4,\ 3,\ 6_1,\ \overline{4_1},\ 3_1;\ 3_1)$.
23. $(6_1;\ \overline{4_1},\ 4_1,\ 5,\ 3,\ 4,\ 6,\ 3_1;\ 3_1)$.
24. $(6_1;\ 5,\ 5,\ 3,\ 4,\ 5_1,\ \overline{4_1},\ 3_1;\ 3_1)$.
25. $(6_1;\ 6,\ 3,\ 5,\ 3,\ 5_1,\ \overline{4_1},\ 3_1;\ 3_1)$.

(s_4).

26. $(6;\ 4,\ 4_1,\ 3_1,\ 4_1,\ 4,\ 4;\ 5_1,\ \overline{4_1})$.
27. $(6;\ 4,\ 5_1,\ 3_1,\ 3_1,\ 5_1,\ 4;\ 4-\overline{4_1})$.
28. $(6;\ 4,\ 4_1,\ 4_1,\ 3,\ 5_1,\ 4;\ 4_1,\ \overline{4_1})$.
29. $(6;\ 4,\ 5,\ 3,\ 5_1,\ 3_1,\ 4_1;\ 4_1,\ \overline{4_1})$.
30. $(6;\ 3_1,\ 4_1,\ 5,\ 3,\ 5,\ 4_1;\ 4_1,\ \overline{4_1})$.

---

31. $(6;\ 3,\ 5_1,\ 3_1,\ 5_1,\ 3,\ 6;\ 3_1,\ \overline{4_1})$.
32. $(6;\ 3,\ 5,\ 5_1,\ 3,\ 4_1,\ 5_1;\ 3_1,\ \overline{4_1})$.
33. $(6;\ 5_1,\ 3,\ 5_1,\ 3,\ 5_1,\ 4;\ 3_1,\ \overline{4_1})$.
34. $(6;\ 5_1,\ 4_1,\ 3,\ 4_1,\ 5_1,\ 4;\ 3-\overline{4_1})$.
35. $(6;\ 5_1,\ 4,\ 3,\ 5_1,\ 4_1,\ 4;\ 3_1,\ \overline{4_1})$.
36. $(6;\ 5_1,\ 4,\ 3,\ 6,\ 4_1,\ 3_1;\ \overline{4_1},\ 3_1)$.

(s_5).

37. $(6;\ 4,\ 4_1,\ 3_1,\ 3_1,\ 4_1,\ 4;\ 4_1,\ \overline{5_1})$.
38. $(6;\ 5_1,\ 3_1,\ 3_1,\ 3_1,\ 5_1,\ 4;\ 3-\overline{5_1})$.
39. $(6;\ 4_1,\ 4_1,\ 3,\ 4_1,\ 4_1,\ 4;\ 3_1,\ \overline{5_1})$.
40. $(6;\ 5_1,\ 3,\ 4_1,\ 3_1,\ 4_1,\ 4;\ 3_1,\ \overline{5_1})$.
41. $(6;\ 5,\ 3,\ 5_1,\ 3_1,\ 3_1,\ 4_1;\ 3_1,\ \overline{5_1})$.

(s_6).

42. $(6;\ 4_1,\ 3_1,\ 3_1,\ 3_1,\ 4_1,\ 4;\ 3_1,\ \overline{6_1})$ (Fig. 36_d).

167—192.

(VIII$_1$.)

c. Mit zwei Deckflächen.

(g_4).

43. $(5_1;\ 5,\ 3_1,\ \overline{4_1},\ 3_1,\ 5,\ 4;\ 4,\ 5_1)$.
44. $(5_1;\ 5,\ 4,\ 3_1,\ \overline{4_1},\ 4_1,\ 4;\ 4,\ 5_1)$.
45. $(5_1;\ 5,\ 4,\ 4,\ 4_1,\ \overline{4_1},\ 3_1,\ 4_1,\ 5)$.

---

46. $(5_1;\ 5,\ 5,\ 3,\ 5_1,\ \overline{4_1},\ 3_1;\ 4_1,\ 4)$.
47. $(5_1;\ 3,\ 5,\ 4_1,\ \overline{4_1},\ 4_1,\ 5:\ 5,\ 3_1)$.
48. $(5_1;\ 3,\ 5,\ 5,\ 4_1,\ \overline{4_1},\ 4_1;\ 5_1,\ 3)$.

(g_5) oder (s_4).

49. $(5_1;\ 3_1,\ \overline{5_1},\ 3_1,\ 4,\ 5,\ 4;\ 4_1,\ 4_1)$.
50. $(5_1;\ 3_1,\ \overline{5_1},\ 3_1,\ 4,\ 4,\ 5;\ 3_1,\ 5_1)$.
51. $(5_1;\ 3_1,\ \overline{5_1},\ 4_1,\ 3,\ 5,\ 5;\ 3_1,\ 4_1)$.

---

52. $(5;\ 5,\ 4,\ 4_1,\ 4_1,\ 4;\ 4_1,\ \overline{4_1},\ 4_1)$ (Fig. 30_2).

(s_5).

53. $(5;\ 5,\ 4_1,\ 3_1,\ 4_1,\ 4;\ 4_1,\ \overline{5_1},\ 3_1)$ (Fig. 30_1).

(s_6).

54. $(5;\ 4_1,\ 3_1,\ 3_1,\ 4_1,\ 5;\ 3_1,\ \overline{6_1},\ 3_1)$.

Gesammtzahl der Vielflache V_1: 1 Fünfflach, 3 Sechsflache, 11 Siebenflache, 54 Achtflache.

§ 21. *Die Vielflache mit zwei mehrkantigen Ecken V_2.*

(VI$_2$.)

A. $f = 6$.

1. $(4_1;\ \overline{4_1},\ 3_1,\ 4_2,\ 3_2,\ 3_{12};\ \overline{4_2},\ 3_{12})$ (Fig. 36_e).

1_a. $(3_{12};\ \overline{4_1},\ 3_{12},\ \overline{4_2},\ 4_2,\ 3_1;\ 4_1,\ 3_2)$.

1_b. $(3_1;\ \overline{4_1},\ 3_{12},\ 4_2,\ 4_1;\ 3_{12},\ \overline{4_2},\ 3_2)$.

(VII$_2$.)

B. $f = 7$.

a. Ohne Deckfläche.

1. $(6;\ 3_1,\ 4_{12},\ 3_2,\ 3_2,\ 4_{12},\ 3_1;\ \overline{4_1}-\overline{4_2})$.

b. Mit einer Deckfläche.

2. $(5_1;\ 4_2,\ 3_2,\ 4_2,\ 3_1,\ \overline{4_1},\ 3_1;\ 4_{12},\ \overline{4_2})$.
3. $(5_1;\ 3_1,\ \overline{4_1},\ 3_{12},\ 3_2,\ 4_2,\ 4;\ 4_{12},\ \overline{4_2})$.

$(\text{VII}_2.)$

b. Mit einer Deckfläche.

4. $(5_1;\ \overline{4_1},\ 4_{12},\ 3_2,\ 3_2,\ 5_2,\ 3_1;\ 3_1 - \overline{4_2}\ ).$
5. $(5_1;\ \overline{4_1},\ 3_{12},\ 4_2,\ 3,\ 5_2,\ 3_1;\ 3_{12},\ \overline{4_2}\ ).$
6. $(5_1;\ \overline{4_1},\ 4_{12},\ 3,\ 4_2,\ 4_2,\ 3_1;\ 3_{12},\ \overline{4_2}\ ).$

$5_a.$ $(5_1;\ \overline{4_1},\ 4_1,\ 3,\ 5_2,\ 3_2,\ 3_{12};\ \overline{4_2},\ 3_{12}).$

---

7. $(5_1;\ \overline{4_1},\ 3_{12},\ 3_2,\ 3_2,\ 4_2,\ 3_1;\ 3_{12},\ \overline{5_2}\ )$ (Fig. 36_f).

---

8. $(5;\ 3_1,\ 4_1,\ 4_2,\ 3_2,\ 4_{12};\ \overline{4_1},\ 3_{12},\ \overline{4_2}\ )$ (Fig. 36_g).

c. Mit zwei Deckflächen.

$(g_4,\ g_4).$

$8_a.$ $(4_{12};\ \overline{4_1},\ 3_{12},\ \overline{4_2},\ 3_2,\ 5,\ 3_1;\ 4_1,\ 4_2).$
9. $(4_{12};\ \overline{4_1},\ 4_1,\ 3_2,\ \overline{4_2},\ 4_2,\ 3_1;\ 4_1,\ 4_2).$

$2_a.$ $(4_{12};\ \overline{4_1},\ 3_1,\ 4_2,\ \overline{4_2},\ 4_2,\ 3_1;\ 5_1,\ 3_2).$
$3_a.$ $(4_{12};\ 3_1,\ \overline{4_1},\ 3_{12},\ \overline{4_2},\ 4_2,\ 4;\ 5_1,\ 3_2).$
$6_a.$ $(4_{12};\ \overline{4_1},\ 3_{12},\ \overline{4_2},\ 5_2,\ 3,\ 4_1;\ 4_1,\ 3_2).$
$1_a.$ $(4_{12};\ \overline{4_1},\ 4_{12},\ \overline{4_2},\ 3_2,\ 6,\ 3_1;\ 3_1 - 3_2).$
$4_a.$ $(4_{12};\ \overline{4_1},\ 5_1,\ 3_2,\ \overline{4_2},\ 5_2,\ 3_1;\ 3_1 - 3_2).$

$(g_4,\ s_4).$

$8_b.$ $(4_1;\ \overline{4_1},\ 3_{12},\ 4_2,\ 5,\ 3_1;\ 4_{12},\ \overline{4_2},\ 3_2).$
$2_b.$ $(4_1;\ \overline{4_1},\ 4_{12},\ 3_2,\ 5_2,\ 3_1;\ 4_1,\ 3_2,\ \overline{4_2}).$
$9_a.$ $(4_1;\ \overline{4_1},\ 4_1,\ 4_2,\ 4_2,\ 3_1;\ 4_{12},\ \overline{4_2},\ 3_2).$
$6_b.$ $(4_1;\ \overline{4_1},\ 4_1,\ 5_2,\ 3_2,\ 3_{12};\ \overline{4_2},\ 4_{12},\ 3).$
10. $(4_1;\ 4_1,\ \overline{4_1},\ 3_{12},\ 4_2,\ 4;\ 4_2,\ \overline{4_2},\ 3_{12})$ (Fig. $30_{2,4}$).

$9_b.$ $(4_1;\ 4_1,\ \overline{4_1},\ 4_{12},\ 3_2,\ 4_2;\ \overline{4_2},\ 4_2,\ 3_1).$

$3_b.$ $(4_1;\ \overline{4_1},\ 4_{12},\ 4,\ 5_2,\ 3_1;\ 3_{12},\ \overline{4_2},\ 3_2).$
$5_b.$ $(4_1;\ \overline{4_1},\ 3_{12},\ 5_2,\ 3,\ 5_1;\ 3_{12},\ \overline{4_2},\ 3_2).$
$6_c.$ $(4_1;\ \overline{4_1},\ 4_{12},\ 3,\ 5_2,\ 4_1;\ 3_{12},\ \overline{4_2},\ 3_2).$

$(g_5,\ s_4);\quad (g_4,\ s_5);\quad (s_4,\ s_4).$

$7_a.$ $(4_1;\ 3_1,\ \overline{5_1},\ 3_{12},\ 3_2,\ 5_2;\ 3_1,\ 3_{12},\ \overline{4_2}).$
11. $(4_1;\ 3_1,\ \overline{5_1},\ 3_1,\ 4_2,\ 4_2;\ 3_{12},\ \overline{4_2},\ 3_{12}).$

211—234.

(VII$_2$.)

c. Mit zwei Deckflächen.

11_a. $(4_1;\ \overline{4_1},\ 3_{12},\ 3_2,\ 4_2,\ 4_1;\ 3_{12},\ \overline{5_2},\ 3_2)$ (Fig. $30_{1,3}$).

* * *

3_c. $(4;\ 4_1,\ 4_{12},\ 3_2,\ 5_2;\ 3_1,\ \overline{4_1},\ 3_{12},\ \overline{4_2})$.

10_a: $(4;\ 4_1,\ 4_1,\ 4_2,\ 4_2;\ 3_{12},\ \overline{4_1},\ \overline{4_2},\ 3_{12})$.

d. Mit drei Deckflächen.

$(g_4,\ g_4)$.

10_b. $(3_{12};\ \overline{4_1},\ 4_1,\ 4_2,\ \overline{4_2},\ 3_{12};\ 4_1,\ 4,\ 4_2)$.

6_d. $(3_{12};\ \overline{4_1},\ 4_{12},\ \overline{4_2},\ 4_2,\ 3_1;\ 5_1,\ 3,\ 4_2)$.

5_c. $(3_{12};\ 5_1,\ \overline{4_1},\ 3_{12},\ \overline{4_2},\ 3_2;\ 5_2,\ 3,\ 4_1)$.

* * *

3_d. $(3_{12};\ \overline{4_1},\ 4_{12},\ \overline{4_2},\ 5_2,\ 3_1;\ 4_1,\ 4,\ 3_2)$.

8_c. $(3_{12};\ \overline{4_1},\ 4_1,\ 4_2,\ \overline{4_2},\ 4_{12};\ 3_1,\ 5,\ 3_2)$ (Fig. 33_c).

5_d. $(3_{12};\ \overline{4_1},\ 3_{12},\ \overline{4_2},\ 4_2,\ 5_1;\ 3_1,\ 5_2,\ 3)$ (Fig. 33_d).

$(g_4,\ g_5)$; $(g_4,\ s_4)$.

11_b. $(3_{12};\ \overline{4_1},\ 3_{12},\ \overline{5_2},\ 3_2,\ 4_1;\ 4_1,\ 3_2,\ 4_2)$.

7_b. $(3_{12};\ \overline{4_1},\ 3_{12},\ \overline{5_2},\ 4_2,\ 3_1;\ 5_1,\ 3_2,\ 3_2)$.

7_c. $(3_{12};\ \overline{4_1},\ 3_{12},\ \overline{5_2},\ 3_2,\ 5_1;\ 3_1,\ 4_2,\ 3_2)$.

* * *

6_e: $(3_1;\ \overline{4_1},\ 3_{12},\ 4_2,\ 5_1;\ 4_{12},\ \overline{4_2},\ 4_2,\ 3)$.

9_c: $(3_1;\ \overline{4_1},\ 4_{12},\ 4_2,\ 4_1;\ 4_1,\ 3_2,\ \overline{4_2},\ 4_2)$.

3_e: $(3_1;\ \overline{4_1},\ 3_{12},\ 5_2,\ 4_1;\ 4_{12},\ \overline{4_2},\ 3_2,\ 4)$.

4_b: $(3_1;\ \overline{4_1},\ 4_{12},\ 5_2,\ 3_1;\ 5_1,\ 3_2,\ \overline{4_2},\ 3_2)$.

8_d: $(3_1;\ \overline{4_1},\ 4_1,\ 5,\ 4_{12};\ 3_{12},\ \overline{4_2},\ 4_2,\ 3_2)$.

2_c: $(3_1;\ 4_1,\ \overline{4_1},\ 4_1,\ 5_2;\ 3_2,\ \overline{4_2},\ 4_{12},\ 3_2)$.

4_c: $(3_1;\ \overline{4_1},\ 5_1,\ 5_2,\ 3_1;\ 4_{12},\ \overline{4_2},\ 3_2,\ 3_2)$.

3_f. $(3_1;\ 5_1,\ \overline{4_1},\ 4_{12},\ 4;\ 4_2,\ \overline{4_2},\ 3_2,\ 3_{12})$.

1_b. $(3_1;\ 6,\ 4_{12},\ \overline{4_1},\ 3_1;\ 4_{12},\ \overline{4_2},\ 3_2,\ 3_2)$.

5_e. $(3_1;\ \overline{4_1},\ 3_{12},\ 5_2,\ 5_1;\ 3_{12},\ \overline{4_2},\ 4_2,\ 3)$.

2_d. $(3_1;\ \overline{4_1},\ 4_{12},\ 4_2,\ 5_1;\ 3_1,\ 4_2,\ \overline{4_2},\ 3_2)$.

$(g_4,\ s_5)$; $(g_5,\ s_4)$; $(s_4,\ s_4)$.

7_d. $(3_1;\ \overline{4_1},\ 3_{12},\ 4_2,\ 5_1;\ 3_{12},\ \overline{5_2},\ 3_2,\ 3_2)$.

* * *

235—258.

(VII₂.)

d. Mit drei Deckflächen.

$7_c.$ $(3_1;\ 3_1,\ \overline{5}_1,\ 3_{12},\ 5_2;\ 4_1,\ 3_{12},\ \overline{4}_2,\ 3_2\ ).$

$11_c.$ $(3_1;\ 4_2,\ 3_{12},\ \overline{5}_1,\ 4_1;\ 4_2,\ \overline{4}_2,\ 3_{12},\ 3_1\ ).$

$7_f.$ $(3_1;\ 4_1,\ \overline{5}_1,\ 3_1,\ 5_2;\ 3_2,\ \overline{4}_2,\ 3_{12},\ 3_{12}).$

$6_f.$ $(3;\ 4_{12},\ 5_2,\ 4_1;\ 4_1,\ \overline{4}_1,\ 3_{12},\ \overline{4}_2,\ 3_2\ ).$

$5_f.$ $(3;\ 5_1,\ 4_1,\ 5_2;\ 3_2,\ \overline{4}_2,\ 3_{12},\ \overline{4}_1,\ 3_{12}).$

(VIII₂.)

C. $f = 8$.

a. Ohne Deckfläche.

1. $(7;\ 3_1,\ 4_{12},\ 3_2,\ 3_2,\ 3_2,\ 4_{12},\ 3_1;\ \overline{4}_1 - \overline{5}_2).$
2. $(7;\ 3_1,\ 4_1,\ 4_2,\ 3_2,\ 3_2,\ 5_{12},\ 3_1;\ \overline{4}_1 \underset{2}{-} \overline{4}_2).$
3. $(7;\ 3_1,\ 4_{12},\ 3_2,\ 4_2,\ 3,\ 5_{12},\ 3_1;\ \overline{4}_1 - \overline{4}_2).$
4. $(7;\ 3_1,\ 4_{12},\ 4_2,\ 3,\ 4_2,\ 4_{12},\ 3_1;\ \overline{4}_1 - \overline{4}_2).$

b. Mit einer Deckfläche.

$(g_4,\ s_4).$

5. $(6_1;\ 4,\ 3_1,\ \overline{4}_1,\ 3_{12},\ 3_2,\ 4_2,\ 4;\ 5_{12},\ \overline{4}_2\ ).$
6. $(6_1;\ 4,\ 3_1,\ \overline{4}_1,\ 3_1,\ 4_2,\ 3_2,\ 4_2;\ \overline{4}_2,\ 5_{12}).$

---

7. $(6_1;\ \overline{4}_1,\ 3_1,\ 5_2,\ 3_2,\ 3_2,\ 5_2,\ 3_1;\ 4_1 - \overline{4}_2\ ).$
8. $(6_1;\ \overline{4}_1,\ 3_1,\ 4_2,\ 4_2,\ 3,\ 5_2,\ 3_1;\ 4_{12},\ \overline{4}_2\ ).$
9. $(6_1;\ \overline{4}_1,\ 3_1,\ 5,\ 3,\ 5_2,\ 3_2,\ 3_{12};\ \overline{4}_2,\ 4_{12}).$
10. $(6_1;\ 3_1,\ \overline{4}_1,\ 4_{12},\ 3_2,\ 3_2,\ 5_2,\ 4;\ 4_1 - \overline{4}_2\ ).$
11. $(6_1;\ 3_1,\ \overline{4}_1,\ 3_{12},\ 4_2,\ 3,\ 5_2,\ 4;\ 4_{12},\ \overline{4}_2\ ).$
12. $(6_1;\ 3_1,\ \overline{4}_1,\ 4_{12},\ 3,\ 4_2,\ 4_2,\ 4;\ 4_{12},\ \overline{4}_2\ ).$
13. $(6_1;\ 3_1,\ \overline{4}_1,\ 4_1,\ 3,\ 5_2,\ 3_2,\ 4_2;\ 4_{12},\ \overline{4}_2\ ).$
14. $(6_1;\ 3_2,\ 3_{12},\ \overline{4}_1,\ 4_1,\ 3,\ 5,\ 4_2;\ \overline{4}_2,\ 4_{12}).$

---

15. $(6_1;\ 3,\ 4_1,\ \overline{4}_1,\ 3_{12},\ 4_2,\ 3,\ 6_2;\ \overline{4}_2,\ 3_{12}).$
16. $(6_1;\ 3,\ 4_1,\ \overline{4}_1,\ 4_{12},\ 3,\ 4_2,\ 5_2;\ \overline{4}_2,\ 3_{12}).$
17. $(6_1;\ 3,\ 4_1,\ \overline{4}_1,\ 4_{12},\ 3_2,\ 3_2,\ 6_2;\ \overline{4}_2 - 3_1).$

---

18. $(6_1;\ \overline{4}_1,\ 4_1,\ 4_2,\ 3_2,\ 3_2,\ 6_2,\ 3_1;\ 3_1 \underset{2}{-} \overline{4}_2).$
19. $(6_1;\ \overline{4}_1,\ 4_{12},\ 4_2,\ 3,\ 4_2,\ 5_2,\ 3_1;\ 3_1 - \overline{4}_2).$
20. $(6_1;\ \overline{4}_1,\ 3_{12},\ 4_2,\ 4,\ 3,\ 6_2,\ 3_1;\ 3_{12},\ \overline{4}_2).$
21. $(6_1;\ \overline{4}_1,\ 4_{12},\ 4,\ 3,\ 5_2,\ 4_2,\ 3_1;\ 3_{12},\ \overline{4}_2).$

259—284.

$(\mathrm{VIII}_2.)$

b. Mit einer Deckfläche.

22. $(6_1;\ 5,\ 4_2,\ 3_2,\ 3_2,\ 5_{12},\ \overline{4}_1,\ 3_1;\ 3_1 \underset{2}{-} \overline{4}_2)$.

23. $(6_1;\ 5_2,\ 3_2,\ 4_2,\ 3,\ 5_{12},\ \overline{4}_1,\ 3_1;\ 3_1 - \overline{4}_2)$.

24. $(6_1;\ 4_2,\ 4_2,\ 4,\ 3,\ 5_{12},\ \overline{4}_1,\ 3_1;\ 3_{12},\ \overline{4}_2)$.

25. $(6_1;\ 5_2,\ 4,\ 3,\ 5_2,\ 3_{12},\ \overline{4}_1,\ 3_1;\ 3_{12},\ \overline{4}_2)$.

26. $(6_1;\ 3_2,\ 5_2,\ 4,\ 3,\ 5_1,\ \overline{4}_1,\ 3_{12};\ \overline{4}_2,\ 3_{12})$.

27. $(6_1;\ \overline{4}_1,\ 4_{12},\ 3,\ 5_2,\ 3,\ 5_2,\ 3_1;\ 3_{12},\ \overline{4}_2)$.

$(g_4,\ s_5);\quad (s_4,\ s_4)$.

28. $(6_1;\ \overline{4}_1,\ 3_1,\ 4_2,\ 3_2,\ 3_2,\ 4_2,\ 3_1;\ 4_{12},\ \overline{5}_2)$.

29. $(6_1;\ \overline{4}_1,\ 3_1,\ 4,\ 4_2,\ 3_2,\ 3_2,\ 3_{12};\ 4_{12},\ \overline{5}_2)$.

---

30. $(6_1;\ \overline{4}_1,\ 4_{12},\ 3_2,\ 3_2,\ 3_2,\ 5_2,\ 3_1;\ 3_1 - \overline{5}_2)$.

31. $(6_1;\ \overline{4}_1,\ 3_{12},\ 3_2,\ 4_2,\ 3,\ 5_2,\ 3_1;\ 3_{12},\ \overline{5}_2)$.

32. $(6_1;\ \overline{4}_1,\ 4_{12},\ 3,\ 4_2,\ 3_2,\ 4_2,\ 3_1;\ 3_{12},\ \overline{5}_2)$.

33. $(6_1;\ \overline{4}_1,\ 3_{12},\ 4_2,\ 3,\ 4_2,\ 4_2,\ 3_1;\ 3_{12},\ \overline{5}_2)$.

34. $(6_1;\ \overline{4}_1,\ 4_1,\ 3,\ 5_2,\ 3_2,\ 3_2,\ 3_{12};\ \overline{5}_2,\ 3_{12})$.

---

35. $(6;\ 3_1,\ 4_1,\ 4_2,\ 3_2,\ 4_2,\ 4_1;\ \overline{4}_1,\ 4_{12},\ \overline{4}_2)$.

36. $(6;\ 3_1,\ 4_1,\ 4,\ 4_2,\ 3_2,\ 4_{12};\ \overline{4}_1,\ 4_{12},\ \overline{4}_2)$.

---

37. $(6;\ 5_{12},\ 3_2,\ 3_2,\ 4_{12},\ 4_1,\ 4;\ 3_1,\ \overline{4}_1 - \overline{4}_2)$.

38. $(6;\ 5_2,\ 3_2,\ 3_2,\ 5_{12},\ 3_1,\ 4_1;\ \overline{4}_1,\ 3_1 - \overline{4}_2)$.

39. $(6;\ 5_2,\ 3,\ 4_2,\ 4_{12},\ 3_1,\ 4_1;\ \overline{4}_1,\ 3_{12},\ \overline{4}_2)$.

40. $(6;\ 4_2,\ 4_2,\ 3,\ 5_{12},\ 3_1,\ 4_1;\ \overline{4}_1,\ 3_{12},\ \overline{4}_2)$.

41. $(6;\ 3_1,\ 5_1,\ 3,\ 5_2,\ 3_2,\ 4_{12};\ \overline{4}_1,\ 3_{12},\ \overline{4}_2)$.

$(g_4,\ s_6);\quad (s_4,\ s_5)$.

42. $(6_1;\ \overline{4}_1,\ 3_{12},\ 3_2,\ 3_2,\ 3_2,\ 4_2,\ 3_1;\ 3_{12},\ \overline{6}_2)$ (Fig. 36_h).

43. $(6;\ 4_1,\ 3_1,\ 4_{12},\ 3_2,\ 3_2,\ 4_2;\ \overline{5}_2,\ 3_{12},\ \overline{4}_1)$ (Fig. 36_i).

c. Mit zwei Deckflächen.

$(g_4,\ g_4)$.

44. $(5_{12};\ \overline{4}_1,\ 3_{12},\ \overline{4}_2,\ 3_2,\ 4,\ 5,\ 3_1;\ 4_1,\ 5_2)$.

45. $(5_{12};\ \overline{4}_1,\ 4_1,\ 3_2,\ \overline{4}_2,\ 3_2,\ 5,\ 3_1;\ 4_1,\ 5_2)$.

46. $(5_{12};\ \overline{4}_1,\ 4_1,\ 4,\ 3_2,\ \overline{4}_2,\ 4_2,\ 3_1;\ 4_1,\ 5_2)$.

---

285 — 309.

(VIII$_2$.)

c. Mit zwei Deckflächen.

47. $(5_{12};\ 4_2,\ \overline{4}_2,\ 4_2,\ 3,\ 5_1,\ \overline{4}_1,\ 3_1;\ 4_1,\ 4_2)$.

48. $(5_{12};\ 3,\ 4_1,\ \overline{4}_1,\ 3_{12},\ \overline{4}_2,\ 4_2,\ 5;\ 5_1,\ 3_3)$.

49. $(5_{12};\ 3_1,\ \overline{4}_1,\ 3_{12},\ \overline{4}_2,\ 5_2,\ 3,\ 5;\ 5_1,\ 3_2)$.

50. $(5_{12};\ \overline{4}_1,\ 3_1,\ 4_2,\ \overline{4}_2,\ 5_2,\ 3,\ 4_1;\ 5_1,\ 3_2)$.

---

51. $(5_{12};\ \overline{4}_1,\ 3_{12},\ \overline{4}_2,\ 5_2,\ 4,\ 3,\ 5_1;\ 4_1,\ 3_2)$.

52. $(5_{12};\ \overline{4}_1,\ 5_1,\ 4,\ 3_2,\ \overline{4}_2,\ 5_2,\ 3_1;\ 3_1 - 4_2)$.

53. $(5_{12};\ \overline{4}_1,\ 3_1,\ 5,\ 5,\ 3_2,\ \overline{4}_2,\ 5_{12};\ 3_1 \underset{2}{-} 3_2)$.

$(g_4,\ s_4)$.

54. $(5_1;\ \overline{4}_1,\ 4_{12},\ 3_2,\ 4_2,\ 5,\ 3_1;\ 4_1,\ 4_2,\ \overline{4}_2)$.

55. $(5_1;\ \overline{4}_1,\ 4_1,\ 4_2,\ 3_2,\ 5_2,\ 3_1;\ 4_1,\ 4_2,\ \overline{4}_2)$.

56. $(5_1;\ \overline{4}_1,\ 4_1,\ 4,\ 5_2,\ 3_2,\ 3_{12};\ \overline{4}_2,\ 4_{12},\ 4)$.

57. $(5_1;\ \overline{4}_1,\ 3_{13},\ 4_2,\ 4,\ 5,\ 3_1;\ 4_{12},\ \overline{4}_2,\ 4_2)$.

58. $(5_1;\ \overline{4}_1,\ 4_1,\ 4,\ 4_2,\ 4_2,\ 3_1;\ 4_{12},\ \overline{4}_2,\ 4_2)$.

---

59. $(5_1;\ 4,\ 4_1,\ \overline{4}_1,\ 3_{12},\ 4_2,\ 4;\ 5_2,\ \overline{4}_2,\ 3_{12})$.

60. $(5_1;\ 4,\ 4_1,\ \overline{4}_1,\ 4_{12},\ 3_2,\ 4_2;\ \overline{4}_2,\ 5_2,\ 3_1)$.

61. $(5_1;\ 3_2,\ 4_2,\ 4_1,\ \overline{4}_1,\ 4_1,\ 4_2;\ \overline{4}_2,\ 5_2,\ 3_1)$.

62. $(5_1;\ \overline{4}_1,\ 3_1,\ 5_2,\ 3_2,\ 5_2,\ 3_1;\ 5_1,\ 3_2,\ \overline{4}_2)$.

63. $(5_1;\ 3_1,\ \overline{4}_1,\ 4_{12},\ 3_2,\ 5_2,\ 4;\ 5_1,\ 3_2,\ \overline{4}_2)$.

---

64. $(5_1;\ 4_{12},\ \overline{4}_1,\ 3_1,\ 4,\ 5_2,\ 4;\ 3_2,\ \overline{4}_2,\ 4_{12})$.

65. $(5_1;\ \overline{4}_1,\ 5_1,\ 3,\ 5_2,\ 4_2,\ 3_1;\ 4_{12},\ \overline{4}_2,\ 3_1)$.

66. $(5_1;\ 4_1,\ \overline{4}_1,\ 4_{12},\ 3,\ 5_2,\ 4;\ 4_2,\ \overline{4}_2,\ 3_{12})$.

67. $(5_1;\ 5,\ 5_2,\ 3,\ 4_{12},\ \overline{4}_1,\ 3_1;\ 4_{12},\ \overline{4}_2,\ 3_2)$.

68. $(5_1;\ \overline{4}_1,\ 4_1,\ 4_2,\ 5_2,\ 3,\ 4_1;\ 4_{12},\ \overline{4}_2,\ 3_2)$.

69. $(5_1;\ \overline{4}_1,\ 4_1,\ 5_2,\ 4_2,\ 3,\ 4_{12};\ \overline{4}_2,\ 4_{12},\ 3)$.

70. $(5_1;\ 4_1,\ \overline{4}_1,\ 3_{12},\ 5_2,\ 3,\ 5;\ 4_2,\ \overline{4}_2,\ 3_{12})$.

71. $(5_1;\ 4_2,\ 3_{12},\ \overline{4}_1,\ 5_1,\ 3,\ 5;\ 4_2,\ \overline{4}_2,\ 3_{12})$.

$(g_5,\ s_4)$, $(g_4,\ s_5)$, $(s_4,\ s_4)$.

72. $(5_1;\ 3_2,\ 3_{12},\ \overline{5}_1,\ 3_1,\ 4,\ 5_2;\ \overline{4}_2,\ 3_{12},\ 4_1)$.

73. $(5_1;\ 3_1,\ \overline{5}_1,\ 3_1,\ 4,\ 4_2,\ 4_2;\ 3_{12},\ \overline{4}_2,\ 4_{12})$ (Fig. 34$_c$.)

310—336.

(VIII$_2$.) c. Mit zwei Deckflächen.

74. $(5_1;\ 3_1,\ \overline{5}_1,\ 3_1,\ 4_2,\ 3_2,\ 5_2;\ 3_1,\ 4_{12},\ \overline{4}_2)$.
75. $(5_1;\ 3_1,\ \overline{5}_1,\ 3_{12},\ 3_2,\ 4_2,\ 5;\ 3_1,\ 4_{12},\ \overline{4}_2)$.

---

76. $(5_1;\ 3_1,\ \overline{5}_1,\ 4_1,\ 3,\ 5_2,\ 4_2;\ 3_{12},\ \overline{4}_2,\ 3_{12})$.
77. $(5_1;\ 3_1,\ \overline{5}_1,\ 4_{12},\ 3,\ 4_2,\ 5_2;\ 3_1,\ 3_{12},\ \overline{4}_2)$.
78. $(5_1;\ 3_1,\ \overline{5}_1,\ 3_1,\ 5_2,\ 3,\ 5_2;\ 3_{12},\ \overline{4}_2,\ 3_{12})$.

---

79. $(5_1;\ \overline{4}_1,\ 3_{12},\ 3_2,\ 4_2,\ 5,\ 3_1;\ 4_{12},\ \overline{5}_2,\ 3_2)$.
80. $(5_1;\ \overline{4}_1,\ 4_1,\ 4_2,\ 3_2,\ 4_2,\ 3_1;\ 4_{12},\ \overline{5}_2,\ 3_2)$.
81. $(5_1;\ 4_1,\ \overline{4}_1,\ 3_{12},\ 3_2,\ 4_2,\ 4;\ 4_2,\ \overline{5}_2,\ 3_{12})$.
82. $(5_1;\ 4_1,\ \overline{4}_1,\ 4_{12},\ 3_2,\ 3_2,\ 4_2;\ \overline{5}_2,\ 4_2,\ 3_1)$.

---

83. $(5_1;\ \overline{4}_1,\ 4_{12},\ 4,\ 4_2,\ 4_2,\ 3_1;\ 3_{12},\ \overline{5}_2,\ 3_2)$.
84. $(5_1;\ \overline{4}_1,\ 4_{12},\ 3,\ 4_2,\ 4_2,\ 4_1;\ 3_{12},\ \overline{5}_2,\ 3_2)$.

---

85. $(5;\ 3_1,\ 4_{12},\ 4_2,\ 5,\ 4_1;\ \overline{4}_1,\ 4_{12},\ \overline{4}_2,\ 3_2)$.
86. $(5;\ 4_1,\ 4_1,\ 4_2,\ 4_2,\ 4;\ 4_{12},\ \overline{4}_1,\ \overline{4}_2,\ 3_{12})$ (Fig. 34_d.)

$(g_5,\ s_5)$, $(g_4,\ s_6)$, $(s_4,\ s_5)$.

87. $(5_1;\ 3_1,\ \overline{5}_1,\ 3_{12},\ 3_2,\ 3_2,\ 5_2;\ 3_1,\ 3_{12},\ \overline{5}_2)$.
88. $(5_1;\ 3_1,\ \overline{5}_1,\ 3_1,\ 4_2,\ 3_2,\ 4_2;\ 3_{12},\ \overline{5}_2,\ 3_{12})$.
89. $(5_1;\ \overline{4}_1,\ 3_{12},\ 3_2,\ 3_2,\ 4_2,\ 4_1;\ 3_{12},\ \overline{6}_2,\ 3_2)$.
90. $(5;\ 4_2,\ 3_2,\ 4_2,\ 4_1,\ 4_1;\ 3_{12},\ \overline{4}_1,\ \overline{5}_2,\ 3_{12})$.

d. Mit drei Deckflächen.

91. $(4_{12};\ \overline{4}_1,\ 4_1,\ 3_2,\ \overline{5}_2,\ 3_2,\ 4_1;\ 4_1,\ 4_2,\ 4_2)$.
92*). $(4_1;\ \overline{4}_1,\ 4_1,\ 4_2,\ 4_2,\ 4_1;\ 4_1,\ 4_2,\ \overline{4}_2,\ 4_2)$.
93. $(4_1;\ 4_1,\ \overline{5}_1,\ 3_{12},\ 3_2,\ 4_2;\ \overline{5}_2,\ 4_2,\ 3_1,\ 3_{12})$.

Gesamtzahl der Vielflache V_2: 1 Sechsflach, 11 Siebenflache, 93 Achtflache.

§ 22. *Die Vielflache mit drei mehrkantigen Ecken, V_3.*

(VI$_3$.) A. $f = 6$.

1. $(3_{12};\ 4_1,\ 3_{13},\ 3_{23},\ \overline{4}_2,\ 3_{12};\ 3_{13},\ \overline{4}_3,\ 3_{23})$ (Fig. $30_{2,4,5}$.)

337 — 357.

*) Das Achtflach 92 ist das Hemiëder der achtseitigen Doppelpyramide, in symmetrischer Darstellung:

$$(\overline{4}_1;\ 4_1,\ 4_1,\ 4_1,\ 4_1;\ 4_2,\ 4_2,\ 4_2,\ 4_2;\ \overline{4}_2).$$

B. $f = 7$.

(VII$_3$.)

a. Mit einer Deckfläche.

1. $(5_1;\ 3_2,\ 3_{12},\ \overline{4}_1,\ 3_{13},\ 3_3,\ 4_{23};\ \overline{4}_2,\ 3_{123},\ \overline{4}_3)$ (Fig. 36$_k$).

b. Mit zwei Deckflächen.

2. $(4_{12};\ \overline{4}_1,\ 3_{12},\ \overline{4}_2,\ 4_{23},\ 3_3,\ 3_{13};\ \overline{4}_3,\ 4_{13},\ 3_2)$.
3. $(4_{12};\ \overline{4}_1,\ 3_{12},\ \overline{4}_2,\ 3_{23},\ 4_2,\ 3_1;\ 4_{13},\ \overline{4}_3,\ 3_{23})$.
3$_a$. $(4_{12};\ \overline{4}_1,\ 3_{13},\ 3_{23},\ \overline{4}_2,\ 4_2,\ 3_1;\ 4_{13},\ \overline{4}_3,\ 3_{23})$.

1$_a$. $(4_{12};\ \overline{4}_1,\ 3_{123},\ \overline{4}_2,\ 3_2,\ 5_3,\ 3_1;\ 3_{13},\ \overline{4}_3,\ 3_{23})$.
2$_a$. $(4_{12};\ \overline{4}_1,\ 4_{13},\ 3_2,\ \overline{4}_2,\ 4_{23},\ 3_1;\ 3_{13},\ \overline{4}_3,\ 3_{23})$.
4. $(4_{12};\ \overline{4}_1,\ 4_{13},\ 3,\ 4_{23},\ \overline{4}_2,\ 3_{12};\ 3_{13},\ \overline{4}_3,\ 3_{23})$.
5. $(4_{12};\ \overline{4}_1,\ 3_{13},\ 3_3,\ 3_{23},\ \overline{4}_2,\ 3_{12};\ 3_{13},\ \overline{5}_3,\ 3_{23})$.

---

6. $(4_1;\ \overline{4}_1,\ 3_{12},\ 4_2,\ 4_3,\ 3_{13};\ 3_{123},\ \overline{4}_2,\ 3_{23},\ \overline{4}_3)$.
3$_b$. $(4_1;\ \overline{4}_1,\ 3_{12},\ 4_{23},\ 3_3,\ 4_{13};\ 3_{12},\ \overline{4}_2,\ 3_{23},\ \overline{4}_3)$.

c. Mit drei Deckflächen.

6$_a$. $(3_{123};\ \overline{4}_1,\ 3_{12},\ \overline{4}_2,\ 3_{23},\ \overline{4}_3,\ 3_{31};\ 4_1,\ 4_2,\ 4_3)$.
1$_b$. $(3_{123};\ \overline{4}_1,\ 3_{12},\ \overline{4}_2,\ 3_{23},\ \overline{4}_3,\ 4_{13};\ 3_1,\ 5_2,\ 3_3)$ (Fig. 33$_e$.)

4$_a$. $(3_{12};\ \overline{4}_1,\ 3_{13},\ 3_{23},\ \overline{4}_2,\ 4_{12};\ 4_{13},\ \overline{4}_3,\ 4_{23},\ 3)$.
3$_c$. $(3_{12};\ \overline{4}_1,\ 4_{13},\ 3_{23},\ \overline{4}_2,\ 3_{12};\ 4_1,\ 3_3,\ \overline{4}_3,\ 4_{23})$.

3$_d$. $(3_{12};\ \overline{4}_1,\ 3_{13},\ 4_{23},\ \overline{4}_2,\ 4_{12};\ 3_{13},\ \overline{4}_3,\ 4_3,\ 3_2)$.
2$_b$. $(3_{12};\ \overline{4}_1,\ 4_{12},\ \overline{4}_2,\ 4_{23},\ 3_1;\ 4_{13},\ \overline{4}_3,\ 3_3,\ 3_{23})$.
1$_c$. $(3_{12};\ 5_2,\ \overline{4}_2,\ 3_{123},\ \overline{4}_1,\ 3_1;\ 4_{13},\ \overline{4}_3,\ 3_3,\ 3_{23})$.
6$_b$. $(3_{12};\ \overline{4}_1,\ 4_1,\ 4_2,\ \overline{4}_2,\ 3_{123};\ 3_{13},\ \overline{4}_3,\ 4_3,\ 3_{23})$.
3$_e$. $(3_{12};\ \overline{4}_1,\ 3_{12},\ \overline{4}_2,\ 4_2,\ 4_{13};\ 3_{13},\ \overline{4}_3,\ 4_{23},\ 3_3)$.

5$_a$. $(3_{12};\ \overline{4}_1,\ 3_{13},\ 3_{23},\ \overline{5}_2,\ 3_{12};\ 4_{13},\ \overline{4}_3,\ 3_{23},\ 3_2)$.
5$_b$. $(3_{12};\ \overline{4}_1,\ 3_{12},\ \overline{5}_2,\ 3_2,\ 4_{13};\ 3_{13},\ \overline{4}_3,\ 3_{23},\ 3_{23})$.
5$_c$. $(3_{12};\ \overline{4}_1,\ 3_{13},\ 3_{23},\ \overline{4}_2,\ 4_{12};\ 3_{13},\ \overline{5}_3,\ 3_3,\ 3_{23})$.

2$_c$. $(3_1;\ \overline{4}_1,\ 4_{13},\ 4_{23},\ 3_{12};\ 4_{12},\ \overline{4}_2,\ 3_{23},\ \overline{4}_3,\ 3_3)$.
3$_f$. $(3_1;\ \overline{4}_1,\ 4_{13},\ 4_2,\ 4_{12};\ 3_{13},\ \overline{4}_3,\ 3_{23},\ \overline{4}_2,\ 3_{23})$.

---

358 — 381.

(VII$_3$.) c. Mit drei Deckflächen.

$1_d.$ $(3_1;\ 4_{13},\ \overline{4}_1,\ 3_{12},\ 5_2:\ 3_3,\ \overline{4}_3,\ 3_{123},\ \overline{4}_2,\ 3_{23})$.

$5_d.$ $(3_1;\ 3_{12},\ \overline{5}_1,\ 3_{13},\ 4_{23};\ \overline{4}_2,\ 3_{12},\ 3_{13},\ \overline{4}_3,\ 3_{23})$.

$4_b.$ $(3;\ 4_{12},\ 4_{23},\ 4_{31};\ \overline{4}_1,\ 3_{12},\ \overline{4}_2,\ 3_{23},\ \overline{4}_3,\ 3_{31})$.

(VIII$_3$.) C. $f = 8$.

a. Mit einer Deckfläche.

$(g_4,\ s_4,\ s_4)$.

1. $(6_1;\ 4_2,\ 3_2,\ 3_{12},\ \overline{4}_1,\ 3_{13},\ 3_3,\ 4_3;\ \overline{4}_2,\ 4_{123},\ \overline{4}_3)$.
2. $(6_1;\ 3_1,\ \overline{4}_1,\ 3_{12},\ 3_2,\ 4_{23},\ 3_3,\ 4_3;\ \overline{4}_3,\ 4_{123},\ \overline{4}_2)$.

---

3. $(6_1;\ \overline{4}_1,\ 4_{13},\ 3_3,\ 3_3,\ 5_{23},\ 3_2,\ 3_{12};\ \overline{4}_2,\ 3_{12}-\overline{4}_3)$.
4. $(6_1;\ \overline{4}_1,\ 4_{13},\ 3,\ 4_3,\ 4_{23},\ 3_2,\ 3_{12};\ \overline{4}_2,\ 3_{123},\ \overline{4}_3)$.
5. $(6_1;\ \overline{4}_1,\ 3_{13},\ 4_3,\ 3,\ 5_{23},\ 3_2,\ 3_{12};\ \overline{4}_2,\ 3_{123},\ \overline{4}_3)$.
6. $(6_1;\ \overline{4}_1,\ 4_{123},\ 3_2,\ 3_2,\ 4_{23},\ 4_3,\ 3_1;\ 3_{13},\ \overline{4}_3-\overline{4}_2)$.
7. $(6_1;\ \overline{4}_1,\ 3_{13},\ 4_{23},\ 3_2,\ 3_2,\ 5_{23},\ 3_1;\ 3_{13},\ \overline{4}_3-\overline{4}_2)$.

$(g_4,\ s_4,\ s_5)$, $(s_4,\ s_4,\ s_4)$.

8. $(6_1;\ \overline{4}_1,\ 3_{13},\ 3_3,\ 3_3,\ 4_{23},\ 3_2,\ 3_{12};\ \overline{4}_2,\ 3_{123},\ \overline{5}_3)$ (Fig. 36$_l$.)
9. $(6;\ 3_1,\ 4_{12},\ 3_2,\ 4_{23},\ 3_3,\ 4_{31};\ 3_{123},\ \overline{4}_1,\ \overline{4}_2,\ \overline{4}_3)$ (Fig. 36$_m$.)

b. Mit zwei Deckflächen.

$(g_4,\ g_4,\ s_4)$

10. $(5_{12};\ \overline{4}_1,\ 3_{13},\ 3_{23},\ \overline{4}_2,\ 3_2,\ 5,\ 3_1;\ 4_{13},\ \overline{4}_3,\ 4_{23})$.
11. $(5_{12};\ \overline{4}_1,\ 3_{12},\ \overline{4}_2,\ 3_2,\ 4_3,\ 4_3,\ 3_1;\ 4_{13},\ \overline{4}_3,\ 4_{23})$.
12. $(5_{12};\ \overline{4}_1,\ 3_{12},\ \overline{4}_2,\ 3_2,\ 5_3,\ 3_3,\ 3_{13};\ \overline{4}_3,\ 4_{13},\ 4_2)$.
13. $(5_{12};\ \overline{4}_1,\ 4_{13},\ 3_3,\ 3_{23},\ \overline{4}_2,\ 4_2,\ 3_1;\ 4_1,\ 4_{23},\ \overline{4}_3)$.
14. $(5_{12};\ \overline{4}_1,\ 4_1,\ 3_2,\ \overline{4}_2,\ 3_{23},\ 4_3,\ 3_1;\ 4_{13},\ \overline{4}_3,\ 4_{23})$.

---

15. $(5_{12};\ \overline{4}_1,\ 3_1,\ 4_2,\ \overline{4}_2,\ 3_{23},\ 4_3,\ 3_1;\ 5_{13},\ \overline{4}_3,\ 3_{23})$.
16. $(5_{12};\ \overline{4}_1,\ 3_1,\ 4_2,\ \overline{4}_2,\ 4_{23},\ 3_3.\ 3_{13};\ \overline{4}_3,\ 5_{13},\ 3_2)$.
17. $(5_{12};\ 3_1,\ \overline{4}_1,\ 3_{12},\ \overline{4}_2,\ 3_{23},\ 4_3,\ 4;\ 5_{13},\ \overline{4}_3,\ 3_{23})$.
18. $(5_{12};\ 3_3,\ 3_{13},\ \overline{4}_1,\ 3_{12},\ \overline{4}_2,\ 4_2,\ 4_3;\ \overline{4}_3,\ 5_{13},\ 3_2)$.

---

19. $(5_{12};\ \overline{4}_1,\ 3_{123},\ \overline{4}_2,\ 3_2,\ 4,\ 5_3,\ 3_1;\ 3_{13},\ \overline{4}_3,\ 4_{23})$.
20. $(5_{12};\ \overline{4}_1,\ 4_{13},\ 3_2,\ \overline{4}_2,\ 3_2.\ 5_3,\ 3_1;\ 3_{13},\ \overline{4}_3,\ 4_{23})$.

382—404.

(VIII$_3$.) **b. Mit zwei Deckflächen.**

21. $(5_{12};\ \overline{4}_1,\ 4_{13},\ 4,\ 3_2,\ \overline{4}_2,\ 4_{23},\ 3_1;\ 3_{13},\ \overline{4}_3,\ 4_{23})$.
22. $(5_{12};\ \overline{4}_1,\ 4_{123},\ \overline{4}_2,\ 3_2,\ 4_3,\ 5_3,\ 3_1;\ 3_1 - \overline{4}_3,\ 3_{23})$.
23. $(5_{12};\ \overline{4}_1,\ 5_1,\ 3_2,\ \overline{4}_2,\ 5_{23},\ 3_3.\ 3_{13};\ \overline{4}_3,\ 3_{13} - 3_2)$.
24. $(5_{12};\ \overline{4}_1,\ 4_{13},\ 4_3,\ 3_2,\ \overline{4}_2,\ 5_{23},\ 3_1;\ 3_1 - \overline{4}_3,\ 3_{23})$.

---

25. $(5_{12};\ \overline{4}_1,\ 3_{12},\ \overline{4}_2,\ 5_{23},\ 3,\ 4_3,\ 3_{13};\ \overline{4}_3,\ 4_{13},\ 3_2)$.
26. $(5_{12};\ \overline{4}_1,\ 3_{12},\ \overline{4}_2,\ 4_{23},\ 4_3,\ 3,\ 4_{13};\ \overline{4}_3,\ 4_{13},\ 3_2)$.
27. $(5_{12};\ \overline{4}_1,\ 3_{13},\ 3_{23},\ \overline{4}_2,\ 5_2,\ 3,\ 4_1;\ 4_{13},\ \overline{4}_3,\ 3_{23})$.
28. $(5_{12};\ \overline{4}_1,\ 3_{12},\ \overline{4}_2,\ 3_{23},\ 5_3,\ 3,\ 4_1;\ 4_{13},\ \overline{4}_3,\ 3_{23})$.
29. $(5_{12};\ \overline{4}_1,\ 3_{12},\ \overline{4}_2,\ 4_{23},\ 3,\ 5_3,\ 3_1;\ 4_{13},\ \overline{4}_3,\ 3_{23})$.
30. $(5_{12};\ \overline{4}_1,\ 4_{13},\ 3,\ 4_{23},\ \overline{4}_2,\ 4_2,\ 3_1;\ 4_{13},\ \overline{4}_3,\ 3_{23})$.

---

31. $(5_{12};\ \overline{4}_1,\ 4_{13},\ 4,\ 3,\ 5_{23},\ \overline{4}_2,\ 3_{12};\ 3_{13},\ \overline{4}_3,\ 3_{23})$.

$(g_4,\ g_4,\ s_5),\quad (g_4,\ s_4,\ s_4)$.

32. $(5_{12};\ \overline{4}_1,\ 3_{12},\ \overline{4}_2,\ 3_{23},\ 3_3,\ 4_3,\ 3_1;\ 4_{13},\ \overline{5}_3,\ 3_{23})$.
33. $(5_{12};\ \overline{4}_1,\ 3_{12},\ \overline{4}_2,\ 4_{23},\ 3_3,\ 3_3,\ 3_{13};\ \overline{5}_3,\ 4_{13},\ 3_2)$.
34. $(5_{12};\ \overline{4}_1,\ 3_{13},\ 3_3,\ 3_{23},\ \overline{4}_2,\ 4_2,\ 3_1;\ 4_{13},\ \overline{5}_3,\ 3_{23})$.
35. $(5_{12};\ \overline{4}_1,\ 4_{13},\ 3,\ 4_3,\ 3_{23},\ \overline{4}_2,\ 3_{12};\ 3_{13},\ \overline{5}_3,\ 3_{23})$.
36. $(5_{12};\ \overline{4}_1,\ 3_{123},\ \overline{4}_2,\ 3_2,\ 4_3,\ 4_3,\ 3_1;\ 3_{13},\ \overline{5}_3,\ 3_{23})$.
37. $(5_{12};\ \overline{4}_1,\ 3_{13},\ 3_{23},\ \overline{4}_2,\ 3_2,\ 5_3,\ 3_1;\ 3_{13},\ \overline{5}_3,\ 3_{23})$.
38. $(5_{12};\ \overline{4}_1,\ 4_{13},\ 3_2,\ \overline{4}_2,\ 3_{23},\ 4_3,\ 3_1;\ 3_{13},\ \overline{5}_3,\ 3_{23})$.

---

39. $(5_1;\ 3_2,\ 4_{12},\ \overline{4}_1,\ 4_{13},\ 3_3,\ 4_{23};\ \overline{4}_2,\ \overline{4}_3,\ 4_{23},\ 3_1)$.
40. $(5_1;\ 3_2,\ 4_{12},\ \overline{4}_1,\ 3_{13},\ 4_3,\ 4_2;\ \overline{4}_2,\ 4_{23},\ \overline{4}_3,\ 3_{13})$.
41. $(5_1;\ 3_2,\ 4_{23},\ 3_{13},\ \overline{4}_1,\ 4_1,\ 4_2;\ \overline{4}_2,\ 4_{23},\ \overline{4}_3,\ 3_{13})$.
42. $(5_1;\ 4_2,\ 3_{12},\ \overline{4}_1,\ 3_{13},\ 4_3,\ 4;\ 4_{23},\ \overline{4}_2,\ \overline{4}_3,\ 3_{123})$.
43. $(5_1;\ \overline{4}_1,\ 3_{12},\ 4_2,\ 5_3,\ 3_3,\ 3_{13};\ \overline{4}_3,\ 4_{123},\ \overline{4}_2,\ 3_2)$.
44. $(5_1;\ \overline{4}_1,\ 4_1,\ 4_2,\ 4_{23},\ 3_3,\ 3_{13};\ \overline{4}_3,\ 4_{123},\ \overline{4}_2,\ 3_2)$.
45. $(5_1;\ \overline{4}_1,\ 4_{12},\ 3_2,\ 4_{23},\ 4_3,\ 3_1;\ 4_{13},\ \overline{4}_3,\ 3_{23},\ \overline{4}_2)$.
46. $(5_1;\ \overline{4}_1,\ 3_{12},\ 4_{23},\ 3_3,\ 5_3,\ 3_1;\ 4_{12},\ \overline{4}_2,\ 3_{23},\ \overline{4}_3)$.
47. $(5_1;\ \overline{4}_1,\ 3_{12},\ 4_2,\ 4_3,\ 4_3,\ 3_1;\ 4_{123},\ \overline{4}_2,\ \overline{4}_3,\ 3_{23})$.

---

48. $(5_1;\ \overline{4}_1,\ 3_{12},\ 5_2,\ 3,\ 5_3,\ 3_{13};\ 3_{123},\ \overline{4}_2,\ \overline{4}_3,\ 3_{23})$.
49. $(5_1;\ \overline{4}_1,\ 4_{13},\ 3,\ 5_3,\ 4_2,\ 3_{12};\ 3_{123},\ \overline{4}_2,\ \overline{4}_3,\ 3_{23})$.

---

405 — 433.

(VIII$_3$.) b. Mit zwei Deckflächen.

(g_4, g_4, s_6), (g_4, s_4, s_5), (g_5, s_4, s_4), (s_4, s_4, s_4).

50. $(5_{12}; \overline{4}_1, 3_{13}, 3_3, 3_3, 3_{23}, \overline{4}_2, 3_{12}; 3_{13}, \overline{6}_3, 3_{23})$.
51. $(5_1; \overline{4}_1, 3_{13}, 3_3, 4_{23}, 3_2, 4_{12}; 3_{13}, \overline{5}_3, 3_{23}, \overline{4}_2)$.
52. $(5_1; \overline{4}_1, 3_{13}, 3_3, 4_3, 4_2, 3_{12}; 3_{123}, \overline{5}_3, \overline{4}_2, 3_{23})$.
53. $(5_1; \overline{4}_1, 3_{12}, 4_{23}, 3_3, 3_3, 4_{13}; 3_{12}, \overline{4}_2, 3_{23}, \overline{5}_3)$.
54. $(5_1; 3_3, \overline{5}_3, 3_{23}, 3_2, 4_{12}, 4_1; 3_{13}, \overline{4}_1, 3_{123}, \overline{4}_2)$.

---

55. $(5; 4_2, 4_{23}, 3_3, 4_{13}, 4_1; 3_{12}, \overline{4}_1, \overline{4}_2, 3_{123}, \overline{4}_3)$.

c. Mit drei Deckflächen.

(g_4, g_4, s_4).

56. $(4_{12}; \overline{4}_1, 4_{13}, 3_3, 4_{23}, \overline{4}_2, 3_{12}; 4_1, 4_2, 4_3, \overline{4}_3)$.
57. $(4_{12}; \overline{4}_1, 4_1, 4_3, 3_{23}, \overline{4}_2, 3_{12}; 4_1, 4_3, \overline{4}_3, 4_{23})$.
58. $(4_{12}; \overline{4}_1, 4_1, 4_2, \overline{4}_2, 3_{23}, 3_{13}; 4_{13}, \overline{4}_3, 4_{23}, 4)$.
59. $(4_{12}; \overline{4}_1, 4_{13}, 3, 4_{23}, \overline{4}_2, 4_{12}; 4_{13}, \overline{4}_3, 4_{23}, 3)$.
60. $(4_{12}; 4_1, \overline{4}_1, 4_1, 4_{23}, \overline{4}_2, 3_2; 4_{23}, \overline{4}_3, 4_{13}, 3_3)$.

(g_4, g_5, s_4), (g_4, g_4, s_5).

61. $(4_{12}; \overline{4}_1, 3_{12}, \overline{5}_2, 3_{23}, 3_3, 4_{13}; 4_1, 3_2, 4_{23}, \overline{4}_3)$.
62. $(4_{12}; \overline{4}_1, 3_{12}, \overline{5}_2, 3_2, 4_3, 3_{13}; 4_{13}, 3_2, 4_{23}, \overline{4}_3)$.
63. $(4_{12}; \overline{4}_1, 3_{13}, 3_{23}, \overline{5}_2, 3_2, 4_1; 4_{13}, \overline{4}_3, 3_{23}, 4_2)$.
64. $(4_{12}; \overline{4}_1, 3_{12}, \overline{5}_2, 4_{23}, 3, 4_{13}; 4_{13}, \overline{4}_3, 3_{23}, 3_2)$.
65. $(4_{12}; \overline{4}_1, 4_{13}, 3_2, \overline{5}_2, 4_2, 3_1; 4_{13}, \overline{4}_3, 3_{23}, 3_{23})$.
66. $(4_{12}; \overline{4}_1, 3_{12}, \overline{5}_2, 3_2, 4, 4_{13}; 3_{13}, \overline{4}_3, 3_{23}, 4_{23})$.
67. $(4_{12}; \overline{4}_1, 4_1, 4_2, \overline{4}_2, 3_{23}, 3_{13}; 3_{13}, \overline{5}_3, 4_3, 3_{23})$.

(g_4, g_5, s_5), (g_4, g_4, s_6).

68. $(4_{12}; \overline{4}_1, 3_{12}, \overline{5}_2, 3_{23}, 3_3, 3_{13}; 4_{13}, \overline{5}_3, 3_{23}, 3_2)$.
69. $(4_{12}; \overline{4}_1, 3_{12}, \overline{5}_2, 3_2, 4_3, 3_{13}; \overline{5}_3, 3_{13}, 3_{23}, 3_{23})$.
70. $(4_{12}; \overline{4}_1, 3_{13}, 3_3, 3_{23}, \overline{4}_2, 4_2, 4_{12}; 3_{13}, 3_3, 3_{23}, \overline{6}_3)$.

Gesammtzahl der Vielflache V_3: 1 Sechsflach, 6 Siebenflache, 70 Achtflache.

434—454.

§. 23. Die Vielflache mit vier, fünf, sechs mehrkantigen E

(VII.$_4$.) V_4. $f = 7$.

1. $(4_{12};\ \overline{4}_1,\ 3_{13},\ 3_{32},\ \overline{4}_2,\ 3_{24},\ 3_{41};\ 3_{134},\ \overline{4}_3,\ \overline{4}_4,\ 3_{234})$.

1_a. $(3_{123};\ \overline{4}_1,\ 3_{13},\ \overline{4}_3,\ 3_{23},\ \overline{4}_2,\ 3_{124};\ 3_{14},\ 4_{34},\ 3_{24},\ \overline{4}_4)$.

1_b. $(3_{12};\ \overline{4}_1,\ 3_{13},\ 4_{23},\ \overline{4}_2,\ 3_{124};\ 3_{134},\ \overline{4}_3,\ 3_{34},\ 3_{24},\ \overline{4}_4)$.

(VIII.$_4$.) $f = 8$.

a. Mit zwei Deckflächen.

$(g_4,\ g_4,\ s_4,\ s_4)$.

1. $(5_{12};\ \overline{4}_1,\ 3_{13},\ 3_{23},\ \overline{4}_2,\ 3_{24},\ 4_4,\ 3_1;\ 4_{134},\ \overline{4}_3,\ \overline{4}_4,\ 3_{234})$.
2. $(5_{12};\ \overline{4}_1,\ 3_{13},\ 3_{23},\ \overline{4}_2,\ 4_{24},\ 3_4,\ 3_{14};\ \overline{4}_4,\ 4_{134},\ \overline{4}_3,\ 3_{23})$.
3. $(5_{12};\ \overline{4}_1,\ 3_{12},\ \overline{4}_2,\ 3_{23},\ 4_{34},\ 3_4,\ 3_{14};\ \overline{4}_4,\ 4_{134},\ \overline{4}_3,\ 3_{23})$.

---

4. $(5_{12};\ \overline{4}_1,\ 3_{123},\ \overline{4}_2,\ 3_2,\ 5_{34},\ 3_4,\ 3_{14};\ \overline{4}_4,\ 3_{134},\ \overline{4}_3,\ 3_{23})$.
5. $(5_{12};\ \overline{4}_1,\ 4_{13},\ 3_2,\ \overline{4}_2,\ 4_{234},\ 3_4,\ 3_{14};\ \overline{4}_4,\ 3_{134},\ \overline{4}_3,\ 3_{23})$.
6. $(5_{12};\ \overline{4}_1,\ 4_{13},\ 3,\ 4_{23},\ \overline{4}_2,\ 3_{24},\ 3_{14};\ 3_{134},\ \overline{4}_3,\ 3_{234},\ \overline{4}_4)$.
7. $(5_{12};\ \overline{4}_1,\ 4_{134},\ 3_4,\ 3_4,\ 4_{234},\ \overline{4}_2,\ 3_{12};\ 3_{13},\ 3_{23},\ \overline{4}_3 - \overline{4}_4)$.

$(g_4,\ g_4,\ s_4,\ s_5)$, $(g_4,\ s_4,\ s_4,\ s_4)$.

8. $(5_{12};\ \overline{4}_1,\ 3_{14},\ 3_4,\ 3_{24},\ \overline{4}_2,\ 3_{23},\ 3_{13};\ 3_{134},\ \overline{4}_3,\ \overline{5}_4,\ 3_{234})$.
9. $(5_1\ ;\ \overline{4}_1,\ 3_{12},\ 4_{23},\ 3_3,\ 4_{34},\ 3_{14};\ 3_{124},\ \overline{4}_2,\ \overline{4}_4,\ 3_{234},\ \overline{4}_3)$.

b. Mit drei Deckflächen.

$(g_4,\ g_4,\ g_4,\ s_4)$.

10. $(4_{123};\ \overline{4}_1,\ 3_{13},\ \overline{4}_3,\ 3_{23},\ \overline{4}_2,\ 3_{24},\ 3_{14};\ 4_{14},\ \overline{4}_4,\ 4_{24},\ 4_3)$.
11. $(4_{123};\ \overline{4}_1,\ 3_{12},\ \overline{4}_2,\ 3_{23},\ \overline{4}_3,\ 4_{34},\ 3_1;\ 4_{14},\ \overline{4}_4,\ 4_{24},\ 3_{34})$.
12. $(4_{123};\ \overline{4}_1,\ 3_{134},\ \overline{4}_3,\ 3_{23},\ \overline{4}_2,\ 4_2,\ 3_1;\ 4_{14},\ \overline{4}_4,\ 4_{24},\ 3_{34})$.
13. $(4_{123};\ 4_{14},\ \overline{4}_1,\ 3_{12},\ \overline{4}_2,\ 4_{234},\ 4_3,\ 3_3;\ 3_{34},\ \overline{4}_4,\ 4_{14},\ 3_2)$.

$(g_4,\ g_4,\ g_4,\ s_5)$, $(g_4,\ g_4,\ s_4,\ s_4)$.

14. $(4_{123};\ \overline{4}_1,\ 3_{12},\ \overline{4}_2,\ 3_{23},\ \overline{4}_3,\ 3_{34},\ 3_{14};\ 3_{14},\ \overline{5}_4,\ 4_{21},\ 3_{34})$.
15. $(4_{123};\ \overline{4}_1,\ 3_{134},\ \overline{4}_3,\ 3_3,\ 4_{24},\ \overline{4}_2,\ 3_{12};\ 3_{14},\ 3_{24},\ \overline{5}_4,\ 3_{34})$.

---

16. $(4_{12};\ \overline{4}_1,\ 3_{13},\ 4_{34},\ 3_{24},\ \overline{4}_2,\ 3_{12};\ 4_{13},\ \overline{4}_3,\ 3_{34},\ \overline{4}_4,\ 4_{24})$.
17. $(4_{12};\ \overline{4}_1,\ 3_{13},\ 4_{23},\ \overline{4}_2,\ 4_{24},\ 3_{14};\ 3_{134},\ \overline{4}_3,\ \overline{4}_4,\ 4_{34},\ 3_2)$.
18. $(4_{12};\ \overline{4}_1,\ 3_{13},\ 4_{23},\ \overline{4}_2,\ 3_{24},\ 4_{14};\ 3_{13},\ \overline{4}_3,\ 4_{34},\ \overline{4}_4,\ 3_{24})$
19. $(4_{12};\ \overline{4}_1,\ 3_{13},\ 4_{34},\ 3_{24},\ \overline{4}_2,\ 4_{12};\ 3_{13},\ \overline{4}_3,\ 4_{34},\ \overline{4}_4,\ 3_{24})$
20. $(4_{12};\ \overline{4}_1,\ 4_1,\ 4_3,\ 3_{23},\ \overline{4}_2,\ 3_{124};\ 3_{14},\ \overline{4}_4,\ 4_{34},\ \overline{4}_3,\ 3_{23}$

---

455 – 477.

(VIII$_4$.) (g_4, g_5, s_4, s_4), (g_4, g_4, s_4, s_5), (g_4, g_4, g_5, s_5).

21. $(4_{12};\ \overline{4}_1,\ 3_{13},\ 3_{23},\ \overline{5}_2,\ 3_2,\ 4_{14};\ 3_{134},\ \overline{4}_3,\ \overline{4}_4,\ 3_{234},\ 3_{24})$.
22. $(4_{12};\ \overline{4}_1,\ 3_{14},\ 3_{24},\ \overline{4}_2,\ 4_{23},\ 3_{13};\ 3_{134},\ \overline{4}_3,\ \overline{5}_4,\ 3_{34},\ 3_{24})$.
23.*) $(3_{123};\ \overline{4}_1,\ 3_{13},\ \overline{5}_3,\ 3_{23},\ \overline{4}_2,\ 3_{124};\ 3_{14},\ 3_{34},\ 3_{34},\ 3_{24},\ \overline{5}_4)$.

Im ganzen 1 Siebenflach und 23 Achtflache von der Form V_4.

(VIII$_5$.) V_5. $f = 8$.

1. $(4_{123};\ \overline{4}_1,\ 3_{12},\ \overline{4}_2,\ 3_{24},\ 3_{34},\ \overline{4}_3,\ 3_{135};\ 3_{15},\ \overline{4}_5,\ 4_{245},\ \overline{4}_4,\ 3_{345})$.
2. $(4_{12};\ \overline{4}_1,\ 3_{13},\ 4_{34},\ 3_{24},\ \overline{4}_2,\ 3_{125};\ 3_{135},\ \overline{4}_3,\ 3_{345},\ \overline{4}_4,\ 3_{245},\ \overline{4}_5)$.

Zwei Achtflache von der Form V_5.

(VIII$_6$.) V_6. $f = 8$.

1. $(3_{123};\ \overline{4}_1,\ 3_{124},\ \overline{4}_2,\ 3_{235},\ \overline{4}_3,\ 3_{136};\ 3_{146},\ \overline{4}_4,\ 3_{245},\ \overline{4}_5,\ 3_{356},\ \overline{4}_6;\ 3_{456})$.

Ein einziges Achtflach von der Form V_6 (die vierseitige Doppelpyramide, das Octaeder im engeren Sinne).

478—483.

Uebersicht der verschiedenen Formen der Vielflache.

Flächenzahl	V_0	V_1	V_2	V_3	V_4	V_5	V_6	
$f = 4$	1							1 Vierflach.
$= 5$	1	1						2 Fünfflache.
$= 6$	2	3	1	1				7 Sechsflache.
$= 7$	5	11	11	6	1			34 Siebenflache.
$= 8$	14	54	93	70	23	2	1	257 Achtflache.

§ 24. Die Vielflache von gleicher Flächenzahl sind in dem Verzeichniss II (§ 19—23) zunächst nach der Anzahl der an ihnen vorkommenden mehrkantigen Ecken im Hauptsysteme unterschieden, ferner, wie früher die einfachen Vielflache (§ 12), nach der Anzahl ihrer Deckflächen in verschiedene Ordnungen (§ 2) oder nach der Kantenzahl ihrer mehrkantigen Ecken als ***Grundecken*** (g_n) und ***Seitenecken*** (s_n) in Unterabtheilungen, so dass zuletzt in Einzelgruppen alle Vielflache vereinigt sind, in deren Flächenformeln die Grundflächen durch dieselbe, mit gleichen Stellenzeigern versehene Zahl

*) Achtflach, durchweg von Dreiecken begrenzt, mit zwei dreikantigen, zwei vierkantigen, zwei fünfkantigen Ecken, polar zum Sechsflach 4 oder VI$_0$, 1 (§ 19).

dargestellt werden, bei denen also die Grundflächen gleichvielkantig und mit einer gleichen Anzahl von Grundecken versehen sind.

Um die Vielflache mit mehrkantigen Ecken unter einander und mit den einfachen Vielflachen in eine übersichtliche Verbindung zu bringen (§ 29), ist ihre Zusammenstellung auf Grundflächen mit geringerer Seitenzahl ausgedehnt, vollständig jedoch, der Raumersparniss wegen, nur für die Vielflache im allgemeinen bis $f=7$ und für die einfachen Achtflache. Die noch hinzugefügten Einzelformen der Achtflache mit mehrkantigen Ecken sollen nur zur Ermöglichung der späteren neuen Gruppirung der Vielflachsformen dienen. Sie sind einem umfassenderen Verzeichniss der sämmtlichen Achtflache im allgemeinen entnommen, die grossentheils für jede ihrer Flächen als Grundfläche eine verschiedene Darstellung ergeben, so dass sich die scheinbar systemlose Vertheilung der Stellenzeiger $a, b, c, \dots$ (§ 33) erklären lässt. Die meist fehlenden Kantenfiguren sind bei der geringen Flächenzahl leicht zu ergänzen.

§ 25. *Grundecken, Seitenecken. Mehrkantige Grundecken* sind an freien Kanten oder Kantenverbindungen ausgeschlossen, können also nur an Vielflachen mit einer oder mehreren Deckflächen und zwar an jeder derselben nur einzeln auftreten (§ 15). Zu ihrer Bildung sind je zwei Grundkanten erforderlich, und diese ergeben mit zwei, drei, vier, ..., n in ihrem Schnittpunkt zusammenstossenden Deckkanten bezüglich eine vier-, fünf-, sechs- ... $(n+2)$-kantige Grundecke. Weil nun in den Kantenfiguren der einfachen Vielflache an den freien Ecken e_2 der Deckflächen immer zwei, an den freien Endpunkten e_3 einer jeden den Deckflächen gemeinschaftlichen Kante drei Deckkanten zusammentreffen, so ergiebt sich aus der Vereinigung einer Ecke der Grundfläche mit einer Ecke e_2 eine vierkantige, mit einer Ecke e_3 eine fünfkantige Ecke.

Im ersten Falle bleibt die Anzahl der Seitenflächen des Vielflachs ungeändert, weil die einer Ecke e_2 anliegenden Seitenflächen, deren Kantenzahl stets grösser als drei ist, bei der Vereinigung, die man sich etwa so vorstellen kann, dass die zu e_2 gehörige Seitenkante des Vielflachs unendlich klein wird, nur je eine Kante verlieren. Ebenso tritt in der zugehörigen Kantenfigur keine weitere Aenderung ein, als dass die betreffende Ecke e_2 als nunmehrige vierkantige Grundecke (innerhalb) den Stellenzeiger 4 erhält. — Die meisten Achtflache mit einer vierkantigen Grundecke (§ 20) können hierzu als Beispiele dienen, und ebenso finden sich unter den Viel-

flachen mit zwei (§ 21), und mit drei vierkantigen Grundecken (§ 22), abgesehen von den Stellenzeigern dieser Grundecken, Kantenfiguren der einfachen Vielflache mit vier Deckflächen vor. Vergl. die *Siebenflache:*

23 oder $VII_0, 3_b$. $(3;\ 5,\ 5,\ 6;\ 3,\ 5,\ 3)$ (Fig. 33).
137 oder $VII_1, 3_c$. $(3_1;\ 4_1,\ \overline{4}_1,\ 4_1,\ 6;\ 3,\ 5_1,\ 3)$ (Fig. 33_a).
138 oder $VII_1, 7_c$. $(3_1;\ \overline{4}_1,\ 4_1,\ 5,\ 5_1;\ 3_1,\ 5,\ 3)$ (Fig. 33_b).
242 oder $VII_2, 8_c$. $(3_{12};\ \overline{4}_1,\ 4_1,\ 4_2,\ \overline{4}_2,\ 4_{12};\ 3_1,\ 5,\ 3_2)$ (Fig. 33_c).
243 oder $VII_2, 5_d$. $(3_{12};\ \overline{4}_1,\ 3_{12},\ \overline{4}_2,\ 4_2,\ 5_1;\ 3_1,\ 5_2,\ 3)$ (Fig. 33_d).
369 oder $VII_3, 1_b$. $(3_{123};\ \overline{4}_1,\ 3_{12},\ \overline{4}_2,\ 3_{23},\ \overline{4}_3,\ 4_{31};\ 3_1,\ 5_2,\ 3_3)$ (Fig. 33_e).

Im zweiten Falle, wo es sich um den Ersatz einer Ecke e_3 durch g_5 handelt, lege man durch e_3 zunächst eine neue Seitenkante des Vielflachs und dann durch diese und die benachbarten Kanten von e_3 Ebenen (Seitenflächen), so wird die Ecke e_3 eine *vierkantige Seitenecke* des Vielflachs, und es ist zugleich *eine Vermehrung der Anzahl sowohl der Grundkanten als der Seitenflächen um eine eingetreten.* Lässt man jetzt die neue Seitenkante von e_3 unendlich klein werden, so wird die Seitenecke e_3 durch eine fünfkantige Grundecke ersetzt und zwar ohne Aenderung der neuen Flächenzahl, so dass schliesslich nach Einführung von g_5 an Stelle von e_3 das Vielflach *eine Fläche mehr zählt als anfänglich.*

Zu bemerken ist zugleich, dass die für die einfachen Vielflache geltende Bedingung, nach welcher nicht zwei Dreiecke als benachbarte Flächen auftreten können (§ 6), bei den mehrkantigen Ecken der Vielflache hinfällig wird, ferner, dass wenn in einem Eckpunkt e einer Kantenfigur drei, vier, ... n Deckflächen zusammentreffen, d. h. wenn von diesen Deckflächen in e bezüglich vier, fünf, ... $(n+1)$ Kanten zusammentreffen, an Stelle von e entweder *eine fünf-, sechs-, ... $(n+2)$-kantige Seitenecke,* oder *eine sechs-, sieben-, ... $(n+3)$-kantige Grundecke* tritt, jedesmal *mit gleichzeitiger Vermehrung der Anzahl der Flächen des Vielflachs um eine.* Beispielsweise ergiebt sich aus dem *Sechsflach:*

7 oder $VI_0, 1_b$. $(3;\ 5,\ 5,\ 4;\ 4,\ 3)$ (Fig. 34)

durch Anfügen einer Seitenkante an einen Endpunkt der gemeinschaftlichen Kante in der Flächenfigur das *Siebenflach:*

125 oder $VII_1, 10_c$. $(4;\ 5,\ 4_1,\ 4_1,\ 4;\ 4_1,\ \overline{4}_1,\ 3)$ (Fig. 34_a),

und wenn weiter s_4 durch g_5 ersetzt wird, das *Siebenflach:*

122 oder $VII_1, 11_a$. $(4_1;\ 5,\ 3_1,\ \overline{5}_1,\ 3_1,\ 4;\ 4_1,\ 3_1)$ (Fig. 34_b),

das natürlich auch unmittelbar aus dem Sechsflach 7 hätte hergeleitet werden können. Wenn gleichzeitig die eine der gemeinschaftlichen Ecken in Fig. 34 durch s_4, die andere durch g_5, oder beide durch s_4 ersetzt werden, so entstehen die *Achtflache:*

336 oder $\mathrm{VIII}_2, 73.$ $(5_2;\ 4_1,\ 4_1,\ 3_2,\ \overline{5_2},\ 3_2,\ 4;\ \ 4_{12},\ \overline{4_1},\ 3_{12})$ (Fig. 34_c.),

349 oder $\mathrm{VIII}_2, 86.$ $(5;\ 4_1,\ 4_1,\ 4_2,\ 4_2,\ 4;\ 4_{12},\ \overline{4_1},\ \overline{4_2},\ 3_{12})$ (Fig. 34_d).

Bei gleichem Verfahren werden aus dem *Siebenflach:*

142 oder $\mathrm{VII}_1, 7_d.$ $(3;\ 5,\ 5,\ 5_1;\ 3_1,\ 4_1,\ 3_1,\ \overline{4_1})$ (Fig. 35),

wenn s_4 durch s_5 oder g_6 ersetzt wird, die *Achtflache:*

$\mathrm{VIII}_1, 53_c.$ $(4;\ 5,\ 5,\ 4_1,\ 4_1;\ 3_1,\ 4_1,\ 3_1,\ \overline{5_1})$ (Fig. 35_a),

oder

$\mathrm{VIII}_1, 54_a.$ $(4_1;\ 3_1,\ 5,\ 5,\ 3_1,\ \overline{6_1};\ 3_1,\ 4_1,\ 3_1)$ (Fig. 35_b).

Grundecken mit mehr als vier Kanten sind nur an Ecken e von Deckflächen möglich, in denen mehr als zwei Kanten zusammenlaufen. Die Kantenzahl der zugehörigen Grundecke wird immer um zwei, die Anzahl der Grundkanten, erhöht, und jede n-kantige Grundecke eines Vielflachs $(n > 4)$ kann durch eine $(n-1)$-kantige Seitenecke eines Vielflachs von gleicher Flächenzahl ersetzt werden. —

Die *mehrkantigen Seitenecken* eines Vielflachs an den freien Ecken e_2 einer Kantenfigur sind sehr einfach in der Weise herzustellen, dass an Stelle der an e_2 zu ergänzenden Seitenkante neue Kanten an e_2 als Seitenkanten des Vielflachs angesetzt und die zugehörigen Seiten der Ecke (Seitenflächen des Vielflachs) durch Ebenen ausgefüllt werden. Wird dabei die anfängliche Seitenkante durch zwei, drei, ..., n neue Seitenkanten ersetzt, so wird die Seitenecke bezüglich vier-, fünf-, ..., $(n+2)$-kantig und demnach die Anzahl der Seitenflächen um eine, zwei, ..., $(n-1)$ Flächen vermehrt, so dass aus einem f-Flach ein $(f+1)$-, $(f+2)$-, ..., $(f+n-1)$-Flach hervorgeht. Den entsprechenden Erfolg hat das Anzetzen von zwei und mehr Seitenkanten an eine mehrkantige Ecke, wie e_3, der Kantenfigur, oder an die Endpunkte einer freien Kantenverbindung.

Beispielsweise kehrt die Kantenfigur des *einfachen Fünfflachs:*

3 oder $\mathrm{V}_0, 1_a.$ $(3;\ 4,\ 4,\ 4;\ 3)$ (Fig. 36),

abgesehen von der Bezeichnung der mehrkantigen Ecken, ausser bei dem *Fünfflach mit* g_4*:*

88 oder $\mathrm{V}_1, 1_a.$ $(3_1;\ 3_1,\ \overline{4_1},\ 3_1,\ 4;\ 3_1)$ (Fig. 36_a),

wieder bei dem *Sechsflach mit* s_4:

93 oder $VI_1, 3_a$. $(4;\ 4_1,\ 3_1,\ 4_1,\ 4;\ 3_1,\ \overline{4}_1)$ (Fig. 36_b);

bei dem *Siebenflach mit* s_5:

113 oder $VII_1, 11$. $(5;\ 4_1,\ 3_1,\ 3_1,\ 4_1,\ 4;\ 3_1,\ \overline{5}_1)$ (Fig. 36_c);

bei dem *Achtflach mit* s_6:

192 oder $VIII_1, 42$. $(6;\ 4_1,\ 3_1,\ 3_1,\ 3_1,\ 4_1,\ 4;\ 3_1,\ \overline{6}_1)$ (Fig. 36_d);

bei dem *Sechsflach mit* (g_4, s_4):

205 oder $VI_2, 1$. $(4_1;\ \overline{4}_1,\ 3_{12},\ 3_2,\ 4_2,\ 3_1;\ 3_{12},\ \overline{4}_2)$ (Fig. 36_e);

bei den *Siebenflachen mit* (g_4, s_5) *und* (s_4, s_4):

215 oder $VII_2, 7$. $(5_1;\ \overline{4}_1,\ 3_{12},\ 3_2,\ 3_2,\ 4_2,\ 3_1;\ 3_{12},\ \overline{5}_2)$ (Fig. 36_f),
216 oder $VII_2, 8$. $(5;\ 3_1,\ 4_1,\ 4_2,\ 3_2,\ 4_{12};\ \overline{4}_1,\ 3_{12},\ \overline{4}_2)$ (Fig. 36_g);

bei den *Achtflachen mit* (g_4, s_6) *und* (s_4, s_5):

305 oder $VIII_2, 42$. $(6_1;\ \overline{4}_1,\ 3_{12},\ 3_2,\ 3_2,\ 3_2,\ 4_2,\ 3_1;\ 3_{12},\ \overline{6}_2)$ (Fig. 36_h),
306 oder $VIII_2, 43$. $(6;\ 3_1,\ 4_1,\ 4_2,\ 3_2,\ 3_2,\ 4_{12};\ \overline{4}_1,\ 3_{12},\ \overline{5}_2)$ (Fig. 36_i);

bei dem *Siebenflach mit* (g_4, s_4, s_4):

358 oder $VII_3, 1$. $(5_1;\ \overline{4}_1,\ 3_{12},\ 3_2,\ 4_{23},\ 3_3,\ 3_{13};\ 3_{123},\ \overline{4}_2,\ \overline{4}_3)$ (Fig. 36_k);

bei den *Achtflachen mit* (g_4, s_4, s_5) *und* (s_4, s_4, s_4):

392 oder $VIII_3, 8$. $(6_1;\ \overline{4}_1,\ 3_{12},\ 3_2,\ 4_{23},\ 3_3,\ 3_3,\ 3_{13};\ 3_{123},\ \overline{4}_2,\ \overline{5}_3)$ (Fig. 36_l),
393 oder $VIII_3, 9$. $(6;\ 3_1,\ 4_{12},\ 3_2,\ 4_{23},\ 3_3,\ 4_{31};\ 3_{123},\ \overline{4}_1,\ \overline{4}_2,\ \overline{4}_3)$ (Fig. 36_m)

u. s. w. Vielflache mit mehrkantigen Seitenecken (Oberecken) ergeben sich auch, wenn Deckfiguren einen Eckpunkt gemeinschaftlich haben und dabei eine offene oder geschlossene Ecke bilden, wie bei dem *Siebenflach:*

129 oder $VII_1, 6_b$. $(4;\ 5_1,\ 4,\ 5_1,\ 4;\ 3_1,\ \overline{4}_1,\ 3_1)$

und bei den *Achtflachen:*

183 oder $VIII_1, 33$. $(6;\ 5_1,\ 3,\ 5_1,\ 3,\ 5_1,\ 4;\ 3_1,\ \overline{4}_1)$,
$VIII_2, 5_d$. $(4;\ 6_1,\ 4_2,\ 5_{12},\ 4;\ 3_1,\ \overline{4}_1,\ 3_{12},\ \overline{4}_2,\ 3_2)$,
$VIII_2, 73_c$. $(4_1;\ \overline{4}_1,\ 4_{12},\ 4,\ 5_2,\ 4_1;\ 3_{12},\ 3_2,\ \overline{5}_2,\ 3_2)$,
$VIII_1, 30_e$. $(3;\ 5,\ 5,\ 6;\ 4_1,\ 4_1,\ 4_1,\ 3_1;\ \overline{4}_1)$,
$VIII_2, 63_e$. $(3_1;\ 5_1,\ \overline{4}_1,\ 5_1,\ 4;\ 5_2,\ 3_2,\ 4_{12},\ 3_2;\ \overline{4}_2)$,
$VIII_4, 6_d$. $(3;\ 4_{12},\ 4_{23},\ 5_{31};\ 3_{14},\ \overline{4}_1,\ 3_{124},\ \overline{4}_2,\ 3_{234},\ \overline{4}_3,\ 3_{34};\ \overline{4}_4)$,

deren Figuren leicht zu ergänzen sind, — und bei den *Pyramidenformen*

87 (V_1, 1), 89 (VI_1, 1), 98 (VII_1, 1), 151 (VIII_1, 1), deren Kantenfiguren durch einen Punkt mit der Seitenflächenzahl dargestellt werden. (Vergl. § 28).

§ 26. ***Zahlensumme der Flächenformeln.*** Die Kantenfiguren ganzer Gruppen von Vielflachen zeigen, wie bei den Beispielen des letzten Paragraphen, eine grosse Uebereinstimmung, obschon die betreffenden Vielflache selbst in dem Verzeichniss II weit von einander getrennt vorkommen. Aus den zugehörigen Flächenformeln ist diese Uebereinstimmung weniger leicht zu entnehmen, weil durch die in den Kantenfiguren als nebensächlich auftretenden mehrkantigen Ecken Aenderungen in der Kantenzahl und Unterbrechungen der Folge der Seitenflächen bedingt werden. Aber auch für die in denselben Unterabtheilungen des Verzeichnisses vereinigten Vielflache dienen die Kantenfiguren wesentlich zur Erleichterung der Vergleichung der Vielflache, während sich aus ihren Flächenformeln der nahe Zusammenhang der zugehörigen Körperformen schwerer erkennen lässt, als bei den einfachen Vielflachen (§ 8). Jedoch besteht auch für die Kantenzahlen in den Flächenformeln der Vielflache mit mehrkantigen Ecken das einfache Gesetz:

> ***In den Flächenformeln der Vielflache mit mehrkantigen Ecken haben, bei gleicher Anzahl und Art dieser Ecken, die Zahlensummen denselben Werth.***

Nach § 14 nämlich lässt sich aus der Flächenformel eines Vielflachs V mit beliebig vielen und beliebig vertheilten Ecken die Flächenformel eines einfachen Vielflachs V_0 herleiten, das aus dem ersteren durch Abstumpfung seiner mehrkantigen Ecken gewonnen werden kann. Bei diesem Verfahren wird jede mehrkantige Ecke von V durch eine gleichvielkantige Fläche von V_0 ersetzt und vermehrt sich zugleich die Kantenzahl von V um die Kantenzahl der abgestumpften Ecke.

Wenn man also die Gesammtzahl der Kanten der das Vielflach V bildenden Flächen, $2k$, um die doppelte Kantenzahl der an V vorkommenden mehrkantigen Ecken vermehrt, so ergiebt sich die doppelte Kantenzahl ($2k_0$) des Vielflachs V_0. Weil dieses aber nur dreikantige Ecken enthält, so ist (§ 1):

$$2\,k_0 = 6\,(f_0 - 2),$$

wenn durch f_0 die Flächenzahl von V_0 bezeichnet wird. Weiter aber ist nach § 17 die Flächenzahl f_0 um die Anzahl μ (§ 14) der mehrkantigen Ecken grösser als die Flächenzahl f von V, also:

Die Doppelzahl der Kanten) (2k) der ein beliebiges Vielflach V bildenden Flächen, vermehrt um die doppelte Kantenzahl ($2k_1$) seiner mehrkantigen Ecken, ergiebt die gleiche Summe* $2k_0 = 6\;(f + \mu - 2)$, *oder es ist:*

$$k + k_1 = 3(f + \mu - 2).$$

Hat das Vielflach nur dreikantige Ecken, so verschwinden k_1 und μ, und es ergiebt sich, dem § 1 entsprechend,

$$k = 3(f-2). -$$

In der That hat in jeder Flächenformel der Paragraphen 20—23, bei gleicher Flächenzahl, die Summe der Kantenzahlen der Flächen, vermehrt um die doppelte Summe der Kantenzahlen der mehrkantigen Ecken, denselben Werth.

§ 27. *Kantenformeln.* Bei gleichen Werthen von f stimmen also Vielflache mit gleicher Anzahl und gleicher Art ihrer mehrkantigen Ecken in der Gesammtzahl ihrer Kanten überein und bilden darum natürliche Systeme, wie sich im Verzeichniss II bestätigt. Bei der weiteren Anordnung nach der Kantenzahl ihrer Grundflächen zeigt sich auch bei den Vielflachen mit mehrkantigen Ecken, dass sie sich, wie die einfachen Vielflache, in Untergruppen vertheilen lassen, bei denen die Einzelsummen der Kanten der Seitenflächen und demnach auch der Deckflächen, übereinstimmen, und dass alsdann auch die zugehörigen Kantenfiguren, bei gleicher Anzahl ihrer gemeinschaftlichen Kanten oder ihrer freien Kanten, dieselbe Gesammtzahl der Kanten der Einzelfiguren darbieten.

Bei der Einfachheit dieser Kantenfiguren kommen naturgemäss dieselben Kantenfiguren, die zuerst zur Darstellung der einfachen Vielflache gedient haben, bei den Vielflachen mit mehrkantigen Ecken wiederum zum Vorschein.

In den Flächenformeln derartiger Vielflache verschiedener Systeme mit gleichen Kantenfiguren (§ 25) aber lässt sich diese Uebereinstimmung, bei der vielfachen Unterbrechung der Zahlenreihen durch die Zahlen der mehrkantigen Ecken, kaum erkennen: darum sind die Flächenformeln durch andere Darstellungen zu ersetzen, aus denen sich sofort auf die gleiche Beschaffenheit auch für Vielflache verschiedener Systeme schliessen lässt.

---

*) Die Doppelzahl der Kanten eines Vielflachs ist gleich der Summe der Kantenzahlen der Flächen seiner Flächenformel.

Dazu dienen die ***Kantenformeln,*** in denen nur das in einer Kantenfigur wirklich Dargestellte, also die Einzelfiguren in ihrer Verbindung, zum Ausdruck gelangt.

Die ***allgemeine Kantenformel eines Vielflachs*** ist:

$$[(m, n, \ldots, p)_\lambda, h],$$

in welcher $m, n, \ldots, p$ in beliebiger Reihenfolge die Seitenzahlen der Deckflächen, λ die Anzahl ihrer gemeinschaftlichen Kanten, h die der freien Kanten bezeichnen. Etwaige Zwischenkanten werden, wie in § 3, durch Striche zwischen den Kantenzahlen der Deckflächen angedeutet. Bei fehlenden Deckflächen tritt an Stelle des inneren Klammerausdrucks eine Null. Die mehrkantigen Ecken des Vielflachs werden besonders angeführt.

Diese Kantenformeln sollen nicht einen Ersatz für die Flächenformeln bieten; es lässt sich aber durch sie der Zusammenhang zwischen den Formen der Vielflache der verschiedenen Systeme in einer einfachen, leicht übersichtlichen Weise darstellen, und zwar ohne dass der Erweiterung über die Grenzen des Verzeichnisses II hinaus Schranken gesetzt werden.

§ 28. ***Gleichwerthige Vielflache.*** In dem Verzeichniss II haben sich in den einzelnen Untergruppen alle diejenigen Vielflache vereinigen lassen, bei denen ***die Anzahl z der ihre Kantenfigur bildenden Linien denselben Werth*** hat. Diese Vielflache derselben Untergruppe sollen kurz ***gleichwerthig*** (äquivalent) genannt werden, ebenso ihre Kantenformeln.

Um nun aus einer Kantenformel die Anzahl z der die Kantenfigur bildenden Linien zu bestimmen, d. h. die Gleichwerthigkeit zweier Kantenformeln zu entscheiden, sei zunächst angenommen, dass die Einzelfiguren, aus denen eine Kantenfigur besteht, keine Kanten gemeinschaftlich haben, sei es, dass sie aufeinanderfolgend je durch eine Ecke in Zusammenhang stehen, oder weil sie durch Zwischenkanten verbunden sind, deren Anzahl δ sein mag. Alsdann wird λ gleich Null und die Kantenzahl der Deckfigur:

$$z = m + n + \cdots + p + h + \delta,$$

wo der ersten Annahme entsprechend δ auch gleich Null sein kann. Haben aber die Einzelfiguren $1, 2, 3, \ldots, \lambda$ Kanten gemeinschaftlich, so verringert sich z bezüglich um $1, 2, 3, \ldots, \lambda$, so dass also aus der allgemeinen Kantenformel

$$[(m, n, \ldots, p)_\lambda, h]$$

bei Festhaltung von δ Zwischenkanten, sich als die Anzahl z der die Kantenfigur bildenden Linien ergiebt:

$$z = m + n + \cdots p + h + \delta - \lambda.$$

Demnach sind z. B. gleichwerthig die ***einfachen Achtflache mit zwei Deckflächen*** (39–52 Verzeichniss II), zu deren Darstellung die Kantenformeln:

$$[(5,4)_1, 0],\quad [(6,3)_1, 0],\quad [(4,4)_1, 1],\quad [(5,3)_1, 1],$$
$$[(4,3)_1, 2],\quad [(4\text{–}3)_0, 0],\quad [(3\text{–}3)_0, 1],\quad [(3\text{–}_2 3)_0, 0]$$

dienen, denen durchweg die Kantenzahl $z = 8$ zukommt. Dieselben Kantenformeln treten auch bei den ***Achtflachen derselben Ordnung, d. h. mit zwei Deckflächen***, mit g_4 (193–198) und mit g_4, g_4 (307–316) ein. —

Ebenso sind gleichwerthig die ***Achtflache mit zwei Deckflächen*** und s_4 oder g_5 (199–202) und den Kantenformeln:

$$[(4,4)_1, 0],\quad [(5,3)_1, 0],\quad [(4,3)_1, 1],\quad [(3\text{–}3)_0, 0],$$

sämmtlich von der Kantenzahl $z = 7$. Diese Kantenformeln, die sich zuerst bei den einfachen Siebenflachen mit zwei Deckflächen (15–19) und bei den Siebenflachen mit zwei Deckflächen und g_4, bezüglich (g_4, g_4) (114–121), bezüglich (217–223) gezeigt haben, werden aber bei den Achtflachen vervollständigt durch die drei neuen gleichwerthigen Kantenformeln

$$[(4,3)_0, 0],\quad [(3,3)_0, 1],\quad [(3,3)_1, 2],$$

mit einer für die einfachen Vielflache unstatthaften Verbindung der Einzelfiguren, nämlich mit zwei Deckflächen mit gemeinschaftlichem Eckpunkt (VIII_1, 44_a und 15_c), oder mit zwei Dreiecken mit einer gemeinschaftlichen Seite (VIII_1, 12_b). Dieselben Kantenformeln gehören zu den mit zwei Deckflächen versehenen Achtflachen mit (g_4, s_4) und (g_4, g_4, s_4). (Vergl. 317–334 und 394–415). —

Dass Vielflache mit gleichviel Deckflächen gleichwerthig sind, die durchweg mit dreikantigen Ecken oder mit g_4, (g_4, g_4), $(g_4, g_4, g_4), \ldots$, bezüglich wenn sie mit s_4 oder g_5, (g_4, s_4) oder (g_4, g_5), (g_4, g_4, s_4) oder (g_4, g_4, g_5) u. s. w. behaftet sind, folgt aus den Untersuchungen in § 25, nach denen Kantenfiguren der einfachen Vielflache die gleiche Anzahl Kanten behalten, wenn freie Ecken zu vierkantigen Grundecken umgewandelt werden, und dass ebenso g_5 und s_4, g_6 und $s_5, \ldots g_n$ und s_{n-1} gleichviel Kanten zu ihrer Darstellung erfordern, d. h. gleichwerthig sind.

Allgemein ergeben sich als gleichwerthig alle Verbindungen mehrkantiger Grund- und Seitenecken, deren Stellenzeiger, bei den Grundecken um je vier, bei den Seitenecken um je drei vermindert, dieselbe Summe liefern. —

In den folgenden Paragraphen 29—33 sind die Vielflache des Verzeichnisses II nach ihren gleichwerthigen Kantenformeln übersichtlich zusammengestellt.

§ 29. *Die Vielflache ohne Deckfläche.*

a. [0,0], d. i. $z = 0$.

$f=4$, $f=5$ mit s_4, $f=6$ mit s_5, $f=7$ mit s_6, $f=8$ mit s_7,
(1). (87). (89). (98). (151).

die *Pyramiden.*

b. [0,1], d. i. $z = 1$.

$f=5$, $f=6$ mit s_4,
(2). (90).

$f=7$ mit s_5 oder (s_4, s_4), $f=8$ mit s_6 oder (s_4, s_5),
(99) oder (208). (152) oder (264).

die *Dachkörper.*

c. [0,2], d. i. $z = 2$.

$f=6$, $f=7$ mit s_4, $f=8$ mit s_5 oder (s_4, s_4),
(4). (100—102). (153—155) oder (265—267).

d. [0,3], d. i. $z = 3$.

$f=7$, $f=8$ mit s_4,
(8—10). (156—162).

e. [0,4], d. i. $z = 4$.

$f = 8$,
(24—27).

§ 30. *Die Vielflache mit einer Deckfläche.*

a. [3,0], d. i. $z = 3$.

$f=5$, $f=5$ mit g_4, $f = 6$ mit s_4 oder (g_4, s_4),
(3). (88). (93). (205).

$f = 7$ mit s_5 oder (g_4, s_5), (s_4, s_4), (g_4, s_4, s_4),
(113). (215). (216). (358).

$f = 8$ mit s_6 oder (g_4, s_6), (s_4, s_5), (g_4, s_4, s_5), (s_4, s_4, s_4).
(192). (305). (306). (392). (393).

b. [4,0], [3,1], d. i. $z = 4$.

$f = 6$, $f = 6$ mit g_4.
(5; 6) (91; 92).

$f = 7$ mit s_4 oder (g_4, s_4)
(109—112) (209—214).

$f = 8$ mit s_5 oder (g_4, s_5), (s_4, s_4), (g_4, s_4, s_4).
(187—191) (291—304) (385—391).

c. [5,0], [4,1], [3,2], d. i. $z = 5$.

$f = 7$, $f = 7$ mit g_4, $f = 8$ mit s_4 oder (g_4, s_4)
(11—14) (103—108). (176—186) (268—290).

d. [6,0], [5,1], [4,2], [3,3], d. i. $z = 6$.

$f = 8$, $f = 8$ mit g_4,
(28—38) (163—175).

§ 31. ***Die Vielflache mit zwei Deckflächen.***

a. $[(3,3)_1,0]$, d. i. $z = 5$.

$f = 6$ mit s_4 oder g_5; (g_4, s_4); (g_4, g_4, s_4).
(96; 97). (207). (357).

$f = 7$ mit s_5 oder g_6; $(g_4, s_5;\ g_5, s_4;\ s_4, s_4)$;
(149; 150). (233—237).

oder mit $(g_4, g_4, s_5;\ g_4, s_4, s_4;\ g_4, g_4, s_4, s_4)$.
(365—367) (455).

$f = 8$ mit s_6, oder $(g_4, s_6;\ g_5, s_5;\ s_4, s_5)$; oder
(204) (350—353).

mit $(g_4, g_4, s_6;\ g_4, s_4, s_5;\ g_5, s_4, s_4;\ s_4, s_4, s_4)$, oder
(434—439)

mit $(g_4, g_4, s_4, s_5;\ g_4, s_4, s_4, s_4)$.
(465; 466).

b. $[(4,3)_1,0]$, $[(3,3)_0,0]$, $[(3,3)_1,1]$, d. i. $z = 6$.

$f = 6$, $f = 6$ mit g_4.
(7). (94; 95).

$f = 7$ mit g_5 oder s_4; (g_4, s_4); (g_4, g_4, s_4).
(122—129). (224—232). (359—364).

$f = 8$ mit s_5; $(g_4, s_5;\ g_5, s_4;\ s_4, s_4)$; $(g_4, g_4, s_5;\ g_4, s_4, s_4)$; (g_4, g_4, s_4, s_4).
(203) (335—349) (416—433). (458—464).

c. $[(4,4)_1, 0]$, $[(5,3)_1, 0]$, $[(4,3)_0, 0]$, $[(4,3)_1, 1]$,
$[(3-3)_0, 0]$, $[(3,3)_0, 1]$, $[(3,3)_1, 2]$, d. i. $z = 7$.

$f = 7$; $f = 7$ mit g_4 oder (g_4, g_4)
(15—19). (114—121). (217—223).

$f = 8$ mit g_5 oder s_4; (g_4, s_4); (g_4, g_4, s_4)
(199—202) (317—334). (394—415).

d. $[(5,4)_1, 0]$, $[(6,3)_1, 0]$, $[(4,4)_1, 1]$, $[(5,3)_1, 1]$,
$[(4,3)_1, 2]$, $[(4-3)_0, 0]$, $[(3-3)_0, 1]$, $[(3 \underset{2}{-} 3)_0, 0]$, d. i. $z = 8$.

$f = 8$; $f = 8$ mit g_4, oder (g_4, g_4)
(39—52). (193—198). (307—316).

§ 32. *Die Vielflache mit drei Deckflächen.*

a. $[(3,3,3)_3, 0]$, d. i. $z = 6$.

$f = 7$ mit (g_5, s_4, s_4); (s_4, s_4, s_4)
(383; 384).

$f = 8$ mit (g_5, s_4, s_5); (s_4, s_4, s_5)
(69_a; 66_b)

b. $[(4,3,3)_3, 0]$; $[(3,3,3)_2, 0]$; $[(3,3,3)_3, 1]$, d. i. $z = 7$.

$f = 7$ mit g_6 oder s_5; $(g_4, s_5;\ g_5, s_4;\ s_4, s_4)$;
(149, 150) (258—263).

$(g_4, g_4, s_5;\ g_4, g_5, s_4;\ g_4, s_4, s_4)$; (g_4, g_4, s_4, s_4).
(377—382) (456, 457)

$f = 8$ mit s_6 oder $(g_4, s_6;\ g_5, s_5;\ g_6, s_4;\ s_4, s_5)$; $(g_4, g_5, s_5;\ g_4, s_4, s_6)$;
(42_b) (386, 11 Formen) (452—454)

oder $(g_4, g_4, s_4, s_5;\ g_4, g_5, s_4, s_4;\ g_4, s_4, s_4, s_4)$; $(g_4, g_4, s_4, s_4, s_4)$
(465—470; 478, 479). (482).

c. $[(4,4,3)_3, 0]$, $[(5,3,3)_3, 0]$, $[(4,3,3)_3, 1]$, $[(4,3,3)_2, 0]$,
$[(3,3,3)_1, 0]$, $[(3,3,3)_2, 1]$, d. i. $z = 8$.

$f = 7$ mit g_5 oder s_4, oder $(g_4, g_5;\ g_4, s_4)$; (g_4, g_4, s_4)
(139—148). (244—257). (370—376).

$f = 8$ mit g_6 oder s_5, oder $(g_5, s_4;\ g_4, s_5;\ s_4, s_4)$, oder
(2_d, 3_b) (66 Formen)

$(g_4, g_5, s_4;\ g_4, g_4, s_5;\ g_4, s_4, s_4)$; oder $(g_4, g_4, g_4, s_5;\ g_4, g_4, s_4, s_4)$; oder $(g_4, g_4, g_4, s_4, s_4)$
(445—451). (471—477) (481).

d. $[(4,4,4)_3,0]$, $[(5,4,3)_3,0]$, $[(4,4,3)_2,0]$, $[(5,3,3)_2,0]$, $[(4,4,3)_3,1]$, $[(5,3,3)_3,1]$, $[(4,3,3)_2,1]$, $[(4,3,3)_1,0]$, $[(3,3-3)_1,0]$, d. i. $z = 9$.

$f = 7$, $f = 7$ mit g_4, oder (g_4, g_4), oder (g_4, g_4, g_4)
(20—23). (131—138). (238—243). (368, 369).

$f = 8$ mit g_5 oder s_4, oder $(g_4, g_5;\ g_4, s_4)$, oder (g_4, g_4, s_4), oder (g_4, g_4, g_4, s_4)
(139—148). (354, 355). (440—444). (467—470).

e. $[(5,4,4)_3,0]$, $[(5,5,3)_3,0]$, $[(6,4,3)_3,0]$, $[(4,4,4)_2,0]$, $[(5,4,3)_2,0]$, $[(6,3,3)_2,0]$, $[(4,4,4)_1,0]$, $[(5,4,3)_3,1]$, $[(4,4,3)_2,1]$, $[(5,3,3)_2,1]$, $[(4,3-3)_1,0]$, d. i. $z = 10$.

$f = 8$, $f = 8$ mit g_4, oder (g_4, g_4), oder (g_4, g_4, g_4).
(53—70). (131—138). (36 Formen). (7 Formen).

§ 33. *Die Vielflache mit vier Deckflächen.* (Achtflache).

a. $[(5,5,5;3)_6,0]$, $[(6,5,4;3)_6,0]$, $[(5,4,4,4)_5,0]$, $[(5,5,4,3)_5,0]$, $[(6,4,4,3)_5,0]$, $[(6,5,3,3)_5,0]$, $[(5,4,4,3)_4,0]$, $[(5,5,3,3)_4,0]$, $[(6,4,3,3)_4,0]$, $[(4,4,4,3)_3,0]$, $[(5,4,3,3)_3,0]$, $[(6,3,3,3)_3,0]$, d. i. $z = 12$.

$f = 8$, $f = 8$ mit g_4, oder (g_4, g_4), oder (g_4, g_4, g_4)
(71—86) VIII_1, 38 Formen. VIII_2, 30 Formen. VIII_3, 8 Formen.

b. $[(5,5,4;3)_6,0]$, $[(6,4,4;3)_6,0]$, $[(4,4,4,4)_5,0]$, $[(5,4,4,3)_5,0]$, $[(5,5,3,3)_5,0]$, $[(6,4,3,3)_5,0]$, $[(4,4,4,3)_4,0]$, $[(5,4,3,3)_4,0]$, $[(6,3,3,3)_4,0]$, $[(4,4,3,3)_3,0]$, $[(5,3,3,3)_3,0]$, d. i. $z = 11$.

$f = 8$ mit g_5 oder s_4, oder $(g_4, g_5;\ g_4, s_4)$, oder $(g_4, g_4, g_5;\ g_4, g_4, s_4)$,
VIII_1, 60 Formen. VIII_2, 115 Formen. VIII_3, 65 Formen.

oder (g_4, g_4, g_4, s_4).
VIII_4, 9 Formen.

c. $[(4,4,4,3)_5,0]$, $[(5,4,3,3)_5,0]$, $[(6,3,3,3)_5,0]$, $[(4,4,3,3)_4,0]$, $[(4,3,3,3)_3,0]$, d. i. $z = 10$.

$f = 8$ mit g_6 oder s_5, oder $(g_4, g_6;\ g_5, g_5;\ g_5, s_4;\ g_4, s_5;\ s_4, s_4)$, oder
VIII_1, 14 Formen. VIII_2 95 Formen.

$(g_4, g_5, s_4;\ g_4, g_4, s_5;\ g_4, s_4, s_4)$, oder $(g_4, g_4, g_5, s_4;\ g_4, g_4, g_4, s_5;\ g_4, g_4, s_4, s_4)$
VIII_3, 110 Formen. VIII_4, 36 Formen. (471—477).

oder $(g_4, g_4, g_4, s_4, s_4)$
VIII_5, 3 Formen.

d. $[(4,4,4,3)_6,0]$, $[(4,4,3,3)_5,0]$, $[(5,3,3,3)_5,0]$ $[(4,3,3,3)_4,0]$, $[(3,3,3,3)_3,0]$, d. i. $z = 9$.

$f = 8$ mit g_7 oder s_6, oder $(g_5, s_5;\ g_6, s_4;\ g_4, s_6;\ s_4, s_5)$
VIII$_1$, 2 Formen. VIII$_2$, 20 Formen.

oder $(g_4, g_5, s_5;\ g_4, g_6, s_4;\ g_5, g_5, s_4;\ g_4, g_4, s_6;\ g_4, s_4, s_5;\ g_5, s_4, s_4;\ s_4, s_4, s_4)$
VIII$_3$, 53 Formen.

oder $(g_4, g_4, g_5, s_5;\ g_4, g_5, s_4, s_4;\ g_4, g_4, s_4, s_5;\ g_4, s_4, s_4, s_4)$,
VIII$_4$, 28 Formen.

oder $(g_4, g_4, s_4, s_4, s_4)$, oder $(g_4, g_4, g_4, s_4, s_4, s_4)$.
VIII$_5$, 3 Formen. VIII$_6$, 1.

e. $[(4,3,3,3)_5,0]$, $[(3,3,3,3)_4,0]$, d. i. $z = 8$.

$f = 8$ mit $(g_5, s_4, s_5;\ g_6, s_4, s_4;\ s_4, s_4, s_5)$,
VIII$_3$, 6 Formen.

oder $(g_5, g_5, s_4, s_4;\ g_4, g_5, s_4, s_5;\ g_5, s_4, s_4, s_4;\ g_4, s_4, s_4, s_5;\ s_4, s_4, s_4, s_4)$.
VIII$_4$, 6 Formen.

Anmerkung. Die Kantenfiguren der Achtflache mit vier Deckflächen, d. h. mit einem Dreieck als Grundfläche, haben keine freie Kante, weil durch das dem freien Endpunkt einer solchen zugehörige Seitendreieck zwei Eckpunkte, durch die beiden freien Ecken der geschlossenen Deckkantenfigur ebenfalls zwei Eckpunkte der Grundfläche bedingt werden, diese also ein Viereck sein müsste. Ebenso fehlen in diesen Kantenfiguren die Zwischenkanten, weil an den durch sie verbundenen, geschlossenen Theilen der Deckfiguren mindestens je zwei freie Ecken vorkommen würden.

§ 34. *Zusammenhang der Vielfache.* Aus der in den letzten Paragraphen enthaltenen Uebersicht der nach ihren Kantenformeln geordneten Vielflache geht zunächst hervor, dass, wenn von den mehrkantigen Ecken abgesehen wird, die den gleichen Kantenfiguren zugehörigen Vielflache auch in den Kantenformeln übereinstimmen, ferner aber auch, dass ein einfacher Zusammenhang zwischen den Vielflachen der verschiedenen Systeme (§ 24) stattfindet. Beispielsweise lassen sich aus der Kantenformel eines Siebenflachs mit einer mehrkantigen Ecke zugleich die Kantenformeln der gleichwerthigen Siebenflache desselben und der benachbarten Systeme, also die der gleichwerthigen einfachen oder mit zwei oder drei mehrkantigen Ecken versehenen Siebenflache herleiten, ausserdem aber auch die Kantenformeln der gleichwerthigen Sechsflache, Achtflache u. s. w.

Es handle sich um ein *Siebenflach*

I. $[(4, 3)_1, 0]$ mit s_4 (§ 31, b):

Die Kantenfigur wird durch ein Viereck und Dreieck mit einer gemeinschaftlichen Seite und ohne freie Kante gebildet und hat die Kantenzahl $z = 6$. Die vierkantige Seitenecke s_4 kann an einer der freien Ecken (124, 126) oder an einer der beiden gemeinschaftlichen (dreikantigen) Ecken der Figur liegen (125). Als gleichwerthig ergeben sich die Kantenformeln

II. $[(3, 0)_0, 0]$ und $[(3, 3)_1, 1]$,

gehörig zu Kantenfiguren, die aus zwei Dreiecken mit gemeinschaftlicher Spitze (129), bezüglich mit einer gemeinschaftlichen Seite und einer freien Kante bestehen (127, 128).

Nach § 25 kann weiter s_4 durch eine fünfkantige Grundecke g_5 ersetzt werden, die aber nur einem Endpunkte der gemeinschaftlichen Kante der beiden Deckfiguren zugehören kann, so dass die zur ersten Kantenformel II gehörige Kantenfigur ausgeschlossen bleibt (122, 123).

Die zur Kantenformel I gehörige Figur hat, je nachdem s_4 einer ihrer freien Ecken oder einer dreikantigen Ecke zugehört, zwei oder drei freie Ecken, die auch als vierkantige Grundecken anderer Vielflachsformen auftreten können. Dadurch entstehen mit (g_4, s_4) die Siebenflache 224–229 und mit (g_4, g_4, s_4) die Siebenflache 359–361.

Wird in der Kantenformel I die Seitenecke s_4 durch die Grundecke g_4 ersetzt, so ändert sich zwar die zugehörige Kantenzahl $z = 6$ nicht, wohl aber die Flächenzahl f: es ergiebt sich ein *Sechsflach mit einer vierkantigen Grundecke* (94 oder 95) und endlich, wenn auch die vierkantige Grundecke wegfällt, das *einfache Sechsflach* 7 (Fig. 34).

Eine *Erhöhung der Flächenzahl* dagegen tritt ein, wenn man, ohne die gegebene Kantenformel I zu verändern, die Kantenzahl der Seitenecke s_4 vermehrt. Wird s_4 durch s_5 ersetzt, so wird (§ 25) aus dem Siebenflach ein *Achtflach* (203). An Stelle von s_5 können aber auch die Verbindungen mehrkantiger Ecken $(g_4, s_5; g_5, s_4; s_4, s_4)$ eintreten (335–338; 342–345; 348, 349), oder $(g_4, g_4, s_5; g_4, s_4, s_4)$ d. i. (416–418; 423–431), oder (g_4, g_4, s_4, s_4) d. i. (458–460). — Durch Einführung von s_6 anstatt s_4 würden sich Neunflache ergeben, deren Besprechung hier ausgeschlossen bleibt.

§ 35. *Reduction gleichwerthiger Vielflache.* Die Unterscheidung der mehrkantigen Ecken, ausser nach ihrer Kantenzahl, in Grundecken und Seitenecken, ist auch für die Vereinfachung ihrer Flächenformeln von wesentlicher Bedeutung.

Die *mehrkantigen Grundecken* finden sich in diesen Formeln in der Reihe der Seitenflächen vor und werden beseitigt, wenn sie vierkantig sind, durch Erhöhung der Seitenzahlen der Nachbarflächen um eins (vergl. das Beispiel 1_a)*); wenn sie aber n Kanten haben, für Werthe von $n > 4$, durch Ersatz der beiden benachbarten Seitenflächen n_1 und n_2 durch die Seitenfläche $(n_1 + n_2 - 1)$, so dass sich *die Flächenzahl um eins erniedrigt,* und indem gleichzeitig, wenn $n > 5$ ist (zum Ersatz von g_n) in der Reihe der Deckflächen zwischen zwei derselben Ecke zugehörige Deckflächen s_{n-2}, eine *Oberecke***) eintritt. (B. 1_b und 1_c).

Die *mehrkantigen Seitenecken* sind in der Reihe der Deckflächen verzeichnet. Ihrer Lage nach sind sie zu unterscheiden in:

a. *Seitenecken an freien Ecken der Kantenfigur* (B. 2_a), die in der Flächenformel an den zugehörigen, d. h. mit gleichem Stellenzeiger versehenen und, wenn nicht einer Grundecke benachbart, von Seitenflächen mit Seitenzahlen > 3 eingeschlossenen Seitendreiecken zu erkennen sind. Diese Seitenecken werden beseitigt durch Fortlassung dieser Dreiecke, so dass gleichzeitig die Flächenzahl erniedrigt werden muss. Die Erniedrigung der Flächenzahl bei dem Fortfall einer Seitenecke s_n um $(n-1)$ entspricht dem § 25. *Das Gleiche gilt für die Erniedrigung der Flächenzahl bei den folgenden Fällen* b *bis* e.

b. *Seitenecken an freien Endpunkten* von Kanten oder Kantenverbindungen (B. 2_b) gleichen in ihrer Darstellung durch eine Flächenformel den Seitenecken *a*; jedoch gehört ihnen keine Deckfläche mit gleichem Stellenzeiger zu. Die bei ihrer Beseitigung zum Fortfall kommenden Seitendreiecke werden durch ein einzelnes, unbezeichnetes Dreieck ersetzt.

c. *Seitenecken an Anfangspunkten* freier Kanten oder Zwischenkanten (B. 2_c). Die zugehörigen Seitenflächen sind durch andere, nicht mit gleichen Stellenzeigern versehene Seitenflächen getrennt und die Ecken selbst von

*) Es ist hier und weiterhin unter B. auf das Beispiel in der zweiten Hälfte dieses Paragraphen verwiesen.

**) Zweckmässig sind *Seitenecken, deren Kanten nur Deckkanten sind,* als *Oberecken* zu benennen.

einer oder mehreren benachbarten, entsprechenden Deckflächen begleitet. Beseitigt werden sie, indem die benachbarten oder durch Dreiecke getrennten, zugehörigen Seitenflächen n_1 und n_2, unter Wegfall der Dreiecke zu einer einzigen Seitenfläche (n_1+n_2-3) vereinigt werden (vergl. 1_b); *dasselbe gilt bei Beseitigung der mehrkantigen Ecken in den Fällen d und e.*

d. *Seitenecken an Knotenpunkten* von Kantenverbindungen (B. 2_d) sind zu erkennen an getrennten zugehörigen Seitenflächen, denen keine Deckfläche entspricht. (Vergl. c).

e. Zu *Seitenecken an Verzweigungspunkten* (B. 2_e) gehören Seitenflächen, die einzeln oder zu zwei, zwischen denen noch Dreiecke mit gleichen Stellenzeigern liegen können, mehr als zwei durch Seitenflächen mit verschiedenen Stellenzeigern getrennte Gruppen bilden. Auch ihnen gehört keine Deckfläche zu. Bei einer Verzweigung in drei oder mehr Aeste treten durch die Beseitigung *Oberecken* ein.

f. Die *Oberecken* sind daran zu erkennen, dass ihnen entweder keine Seitenflächen oder nur einzelne, getrennt liegende Seitenflächen zugehören. Sie lassen sich, ohne die Gleichwerthigkeit, d. h. die Kantenzahl der geschlossenen Kantenfigur zu ändern, nicht beseitigen.

Beispiel. Vereinfachung des Dreissigflachs XXX:

$$\begin{aligned}(23_{1\,5\,11};\ &\overline{4}_1,\ 3_{12},\ 3_2,\ 4_{23},\ 5_{34},\ 3,\ 4_4,\ 3_4,\ 4_{34},\ 3_{35},\ \overline{5}_5,\ 5_{567},\ 3_6,\ 3_6,\\ &4_{67},\ 4_7,\ 3,\ 7_{789},\ 3_9,\ 3_9,\ 3_9,\ 5_{8\,9\,10},\ 3_{10},\ 3_{10\,11},\ \overline{6}_{11},\ 3_{1\,11};\\ &4_{1\,2\,12},\ \overline{5}_2,\ 4_{2\,3\,5\,12},\ 5_3-\overline{4}_4,\ 5_{5\,8\,12}-\overline{4}7-\overline{4}_6,\ \overline{4}_8-5_9,\ 4_{8\,10\,11},\ 4_{10},\ 3_{11\,12},\ 3_{11\,12};\ \overline{5}_{12})\end{aligned}$$

1. *Beseitigung der Grundecken.*

a. Grundecke $\overline{4}_1$.

Aus XXX:

$$(23_{1\,5\,11};\ 4_1,\ 3_{12},\cdots \overline{6}_{11},\ 3_{1\,11};\ 4_{1\,2\,12},\cdots)$$

wird XXX_1:

$$(23_{5\,11};\ 4_2,\ \cdots \overline{6}_{11},\ 4_{11};\ 4_{2\,12},\cdots).$$

b. Grundecke $\overline{5}_5$.

Die zugehörigen Seitenflächen 3_{35} und 5_{567} vereinigen sich zu dem Siebeneck 7_{367}; es geht demnach eine Fläche verloren, so dass aus XXX_1:

$$(23_{5\,11};\cdots 3_{35},\ \overline{5}_5,\ 5_{5\,6\,7},\cdots 4_{2\,3\,5\,12},\ \overline{5}_3-\overline{4}_4,\ 5_{5\,8\,12},\cdots)$$

wird XXIX:

$$(22_{11};\ \cdots 7_{3\,67},\ \cdots 4_{2\,3\,12},\ \overline{5}_3-\overline{4}_4,\ 5_{8\,12},\cdots).$$

c. Grundecke $\overline{6}_{11}$.

Diese sechskantige Grundecke wird durch die vierkantige Oberecke $\overline{4}_{11}$ ersetzt, die in die Reihe der Deckflächen etwa zwischen $3_{11\,12}$ und $3_{11\,12}$ einzuführen ist, und die Seitenflächen von $\overline{6}_{11}$, nämlich $3_{10\,11}$ und 4_{11} (vergl. a) vereinigen sich zu $6_{10\,11}$, wodurch wieder eine Fläche verloren geht:

Aus XXIX:

$$(22_{11}; \cdots 3_{10\,11}, \overline{6}_{11}, 4_{11}; \cdots 4_{8\,10\,11}, \overline{4}_{10}, 3_{11\,12}, 3_{11\,12};.)$$

wird XXVIII:

$$(21; \cdots 6_{10\,11}; \cdots 4_{8\,10\,11}, \overline{4}_{10}, 3_{11\,12}, \overline{4}_{11}, 3_{11\,12};.),$$

so dass also das XXVIII-Flach entsteht:

$$(21;\ 4_2, 3_2, 4_{23}, 5_{34}, 3, 4_4, 3_4, 4_{34}, 7_{3\,6\,7}, 3_6, 3_6,$$
$$4_{6\,7}, 4_7, 3, 7_{7\,8\,9}, 3_9, 3_9, 3_9, 5_{8\,9\,10}, 3_{10}, 6_{10\,11};$$
$$4_{2\,12}, \overline{5}_2, 4_{2\,3\,12}, \overline{5}_3 - \overline{4}_4, 5_{8\,12} - \overline{4}_7 - \overline{4}_6, \overline{4}_8 - \overline{5}_9, 4_{8\,10\,11}, \overline{4}_{10}, 3_{11\,12}, \overline{4}_{11}, 3_{11\,12}; \overline{5}_{12}).$$

2. *Beseitigung der Seitenecken.*

a. Seitenecken $\overline{5}_2$ und $\overline{4}_{10}$,

welche beide an *freien Ecken* liegen. Die zugehörigen Seitendreiecke 3_2 und 3_{10} fallen weg, und weil die Seitenvierecke 4_2 und 4_{23} das Fünfeck 5_3 ergeben, gehen im ganzen drei Flächen verloren:

Aus XXVIII:

$$(21;\ 4_2, 3_2, 4_{23}, \cdots 5_{8\,9\,10}, 3_{10}, 6_{10\,11}; 4_{2\,12}, \overline{5}_2, 4_{2\,3\,12}, \cdots 4_{8\,10\,11}, \overline{4}_{10}, \cdots)$$

wird XXV:

$$(18;\ 5_3, \cdots 5_{8\,9}, 6_{11}; 4_{12}, 4_{3\,12}, \cdots 4_{8\,11}, \cdots).$$

b. Seitenecken $\overline{4}_6$ und $\overline{5}_9$,

d. i. *Ecken an freien Endpunkten.* Die zugehörigen Dreiecke 3_6, 3_6 und 3_9, 3_9, 3_9 werden jede Gruppe durch ein unbezeichnetes Dreieck ersetzt, so dass drei Flächen verloren gehen:

Aus XXV:

$$(18; \cdots 7_{3\,6\,7}, 3_6, 3_6, 4_{6\,7}, \cdots 7_{7\,8\,9}, 3_9, 3_9, 3_9, 5_{8\,9}; \cdots - \overline{4}_7 - \overline{4}_6, \overline{4}_8 - \overline{5}_9, \cdots)$$

wird XXII:

$$(15; \cdots 7_{3\,7}, 3, 4_7, \cdots 7_{7\,8}, 3, 5_8; \cdots - \overline{4}_7, \overline{4}_8, \cdots).$$

c. Seitenecke $\overline{5}_3$,

eine *Ecke an einem Anfangspunkte,* weil ihre Seitenflächen 5_3, 5_{34} und 4_{34}, 7_{37} getrennt liegen und die Deckfläche $4_{3\,12}$ dazugehört. Das erste Paar wird ersetzt durch 7_4, das zweite durch 8_{47}, so dass zwei Flächen fortfallen:

Aus XXII:

$$(15;\ 5_3,\ 5_{3\,4},\ 3,\ 4_4,\ 3_4,\ 4_{3\,4},\ 7_{3\,7}, \cdots 4_{3\,12},\ \overline{5_3} - \overline{4_4}, \cdots)$$

wird XX:

$$(13;\ 7_4,\ 3,\ 4_4,\ 3_4,\ 8_{4\,7}, \cdots 4_{12} - \overline{4_4}, \cdots).$$

d. Seitenecke $\overline{4_4}$,

eine *Ecke an einem Knotenpunkte,* weil ihre Seitenflächen (durch ein Dreieck) getrennt sind. Das Dreieck 3_4 fällt fort:

Aus XX:

$$(13;\ 7_4,\ 3,\ 4_4,\ 3_4,\ 8_{4\,7}, \cdots 4_{12} - \overline{4_4}, \cdots)$$

wird XIX:

$$(12;\ 7,\ 3,\ 4,\ 8_7, \cdots 4_{12}, \cdots).$$

e. Seitenecke $\overline{4_7}$,

an einem Verzweigungspunkt liegend, weil ihre Seitenflächen in ihrer Folge eine doppelte Unterbrechung zeigen:

Aus XIX:

$$(12; \cdots 8_7,\ 3,\ 4_7,\ 4_7,\ 3,\ 7_{78}, \cdots - \overline{4_7},\ \overline{4_8}, \cdots)$$

wird XVIII:

$$(11; \cdots 8,\ 3,\ 5,\ 3,\ 7_8, \cdots \overline{4_8}, \cdots).$$

Die noch übrigen mehrkantigen Ecken $\overline{4_8}$, $\overline{4_{11}}$, $\overline{5_{12}}$ sind *Oberecken,* die sich ohne Aenderung der Kantenfigur nicht beseitigen lassen. – Es ist also im Ganzen die Flächenformel entstanden *des* XVIII-*Flachs:*

$$(11;\ 7,\ 3,\ 4,\ 8,\ 3,\ 5,\ 3,\ 7_8,\ 3,\ 5_8,\ 6_{11};\ 4_{12},\ 4_{12},\ 5_{8\,12},\ \overline{4_8},\ 4_{8\,11},\ 3_{11\,12},\ \overline{4_{11}},\ 3_{11\,12};\ \overline{5_{12}}).$$

Zur einfacheren Darstellung der Kantenfigur lassen sich auch die freien Kanten, d. h. die Seitendreiecke (§ 7) beseitigen, so ergeben sich nach einander:

XVII. $(10;\ 6,\ 3,\ 8,\ 3,\ 5,\ 3,\ 7_8,\ 3,\ 5_8,\ 6_{11};\ 4_{12}, \cdots \overline{5_{12}})$.

XVI. $(9;\ 5,\ 7,\ 3,\ 5,\ 3,\ 7_8,\ 3,\ 5_8,\ 6_{11};\ 4_{12}, \cdots \overline{5_{12}})$.

XV. $(8;\ 5,\ 6,\ 4,\ 3,\ 7_8,\ 3,\ 5_8,\ 6_{11};\ 4_{12}, \cdots \overline{5_{12}})$.

XIV. $(7;\ 5,\ 6,\ 3,\ 6_8,\ 3,\ 5_8,\ 6_{11};\ 4_{12}, \cdots \overline{5_{12}})$.

XIII. $(6;\ 5,\ 5,\ 5_8,\ 3,\ 5_8,\ 6_{11};\ 4_{12}, \cdots \overline{5_{12}})$.

XI. $(4;\ 5,\ 5,\ 5,\ 6_{11};\ 4_{12},\ 4_{12},\ 5_{12},\ 4_{11},\ 3_{11\,12},\ \overline{4_{11}},\ 3_{11\,12};\ \overline{5_{12}})$,

wobei zu bemerken ist, dass bei Beseitigung des letzten Seitendreiecks in XIII die Nachbarflächen 5_8 und 5_8 nach Verlust einer Kante sich zu einem Fünfeck vereinigen und die zugehörige Ecke dreikantig wird, so dass sich ein *Elfflach* ergiebt mit einer vierkantigen und einer fünfkantigen Oberecke.

Die zugehörige Figur ist leicht zu zeichnen (Fig. 38), sowie auch die des gegebenen Dreissigflachs (Fig. 37).

Die *Kantenformel* des letzteren ist:

$$[(5, 4, 4, 4, 3, 3)_7, 6] \text{ mit } (g_4, g_5, g_6, 4\, s_4, 3\, s_5);\ z = 22.$$

Werden die Stellenzeiger 11 und 12 der beiden mehrkantigen Ecken des Elfflachs durch 1 und 2 ersetzt, so wird die *Flächenformel* desselben, bezogen auf 6_1 als Grundfläche:

$$(6_1;\ 4_2,\ 3_{12},\ \overline{4_1},\ 4_1,\ 5,\ 4,\ 5;\ 4_2,\ 5,\ 5_2,\ 3_{12},\ \overline{5_2}).$$

§ 36. ***Theilung ebener Figuren.*** Aus dem Verzeichniss II (§§ 19—23) ist zugleich die Lösung einer Theilungsaufgabe geradliniger Figuren für die einfachsten Fälle zu entnehmen.

Wenn man nämlich die zu dem Verzeichniss II gehörigen schematischen Kantenfiguren durch Anfügung der Seiten- und Grundkanten (§ 4) vervollständigt, so wird durch jede Figur eine Theilung der Grundfläche, d. i. eines Dreiecks, Vierecks, ... Siebenecks dargestellt in drei, vier, ... sieben Stücke, nämlich in soviel Stücke, als die Gesammtzahl der Seiten- und Deckfiguren beträgt, und zwar durch gerade Linien, auf denen auch die Ecken der Figur liegen. Die sämmtlichen Figuren des Verzeichnisses, unabhängig von ihren Beziehungen zu den Vielflachen, ergeben alle möglichen Lösungen, mögen die Theillinien einzeln oder mehrfach durch die Ecken und zu drei, vier u. s. w. durch Schnittpunkte innerhalb der Figur gehen. —

In § 19 sind die Lösungen dargestellt der Aufgabe:

> ***Ein System von geraden Linien zu ziehen, die zu drei durch dieselben Punkte gehen und eine bestimmte Anzahl von Theilfiguren bilden, und zwar so, dass die äussersten Linien ein Dreieck, ein Viereck, ... eine Figur F von gegebener Seitenzahl einschliessen.***

Die Anzahl der Linien, der Figuren, mit Einschluss von F, der Schnittpunkte kommt dann bezüglich überein mit der Anzahl k der Kanten, f der Flächen, e der Ecken eines einfachen Vielflachs (§ 1).

Sollen von den zu ziehenden Geraden mehr als drei durch einen Punkt gehen, also einen *mehrfachen Schnittpunkt* ergeben, so ändert sich nur die Aufgabe dahin, dass in § 20 die Linien einen einzigen, in § 21 zwei, in § 22 drei, in § 23 vier, fünf oder sechs mehrfache Schnittpunkte haben. Die durch diese verschiedenen Fälle bedingten Beziehungen zwischen e, f, k ergeben sich aus den Paragraphen 14 und 26.

Die Figuren zu dem Verzeichniss II haben für diese Theilung der Figuren, unabhängig von einander, jede ihre besondere Bedeutung. Die ***Anzahl der Lösungen*** unter den verschiedenen Bedingungen ist in der folgenden, dem vervollständigten Verzeichniss entnommenen Tafel übersichtlich zusammengestellt.

Theilung geradliniger Figuren.

	Anzahl der							
	mehrfachen Punkte	Theile	Dreieck	Viereck	Fünfeck	Sechseck	Siebeneck	
§ 19.	0.	3	1					
		4	1	1				
		5	1	2	1			
		6	4	5	4	3		
		7	16	18	14	11	4	
			23	26	19	14	4	86
§ 20.	1.	4	1	1				
		5	4	3	2			
		6	20	17	11	5		
		7	114	106	74	38	12	
			139	127	87	43	12	408
§ 21.	2.	5	2	1				
		6	26	21	8	1		
		7	260	212	117	41	4	
			288	234	125	42	4	693
§ 22.	3.	5	1					
		6	17	9	1			
		7	243	162	65	9		
			261	171	66	9		507
§ 23.	4.	6	2	1				
		7	77	41	9			
			79	42	9			130
	5.	7	6	2				8
	6.	7	1					1
			797	602	306	108	20	1833

Note zu Seite 162 dieses Bandes.

Von Herrn *Saalschütz* in Königsberg i. Pr.

Mit Bezug auf die Anmerkung Seite 162 dieses Bandes bemerke ich, dass ich mich für ein ganzzahliges positives λ von der inhaltlichen Uebereinstimmung meiner Gleichungen mit solchen, die nach der Methode des Herrn *Heymann* entwickelt werden, überzeugt habe, und zwar ist der Zusammenhang dazwischen durch *Gauss*sche Formeln über die functiones contiguae herstellbar. — Bezüglich eines beliebigen λ, d. h. beliebig gewählter Constanten behält sich Herr *Heymann* selbst eine gelegentliche Veröffentlichung über die betreffende Functionalgleichung vor.

Inhaltsverzeichniss der Bände 111—120.





